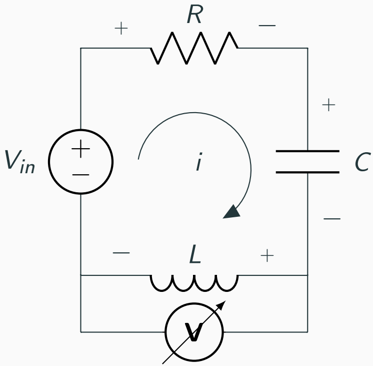
Enunciado

10 Se aplica una f.e.m. alterna de 220 V y 50 Hz a un circuito R-L-C en serie que tiene una inductancia L = 500 mHy y una resistencia R = 200 Ω. Se mide una tensión de 100 V sobre la inductancia. Determine:

a) la impedancia total en módulo y fase, la capacidad C, los valores instantáneos de la corriente y de las caídas de tensión sobre el resistor y el capacitor.

b) Las potencias activa, reactiva y aparente. Realice el diagrama de potencias

Circuito



Dada la impedancia compleja $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, la relación entre corriente y tensión en el plano complejo será:

$$V_{ef} = I_{ef} e^{j\phi} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad (1)$$

Cálculo del capacitor

Con los datos del problema, lo primero que podemos hacer es determinar el valor de I_{ef} utilizando la tensión medida por el voltímetro $V_{ef,L} = 100\,\mathrm{V}$. En particular:

$$V_{ef,L} = I_{ef}\, e^{j\phi}[j\omega L] \underbrace{=}_{j=e^{j\frac{\pi}{2}}} I_{ef}\,\omega L e^{j(\phi+\frac{\pi}{2})}$$

Y la tensión eficaz en módulo será $V_{ef,L} = I_{ef}\omega L$, lo que da como resultado $I_{ef} = 0.64\,\mathrm{A}$ (Obs: $\omega = 2\pi f$).

Cálculo del capacitor

Con los datos del problema, lo primero que podemos hacer es determinar el valor de I_{ef} utilizando la tensión medida por el voltímetro $V_{ef,L} = 100\,\mathrm{V}$. En particular:

$$V_{ef,L} = I_{ef}\, e^{j\phi}[j\omega L] \underbrace{=}_{j=e^{j\frac{\pi}{2}}} I_{ef}\,\omega L e^{j(\phi+\frac{\pi}{2})}$$

Y la tensión eficaz en módulo será $V_{ef,L} = I_{ef}\omega L$, lo que da como resultado $I_{ef} = 0.64\,\mathrm{A}$ (Obs: $\omega = 2\pi f$).

En este punto, se abren dos caminos:

1. Calcular $V_{ef,R} = I_{ef}R$ y luego $V_{ef,C} = V_{ef} - V_{ef,R} - V_{ef,L}$, trabajando todo en módulo
2. Despejar de la ecuación (1) el valor de C.

Cálculo del capacitor

Con los datos del problema, lo primero que podemos hacer es determinar el valor de I_{ef} utilizando la tensión medida por el voltímetro $V_{ef,L} = 100\,\mathrm{V}$. En particular:

$$V_{ef,L} = I_{ef}\, e^{j\phi}[j\omega L] \underbrace{=}_{j=e^{j\frac{\pi}{2}}} I_{ef}\,\omega L e^{j(\phi+\frac{\pi}{2})}$$

Y la tensión eficaz en módulo será $V_{ef,L} = I_{ef}\omega L$, lo que da como resultado $I_{ef} = 0.64\,\mathrm{A}$ (Obs: $\omega = 2\pi f$).

En este punto, se abren dos caminos:

1. Calcular $V_{ef,R} = I_{ef} R$ y luego $V_{ef,C} = V_{ef} - V_{ef,R} - V_{ef,L}$, trabajando todo en módulo
2. Despejar de la ecuación (1) el valor de C.

El camino 1 lleva a una respuesta incorrecta ya que está mal sumar módulos en el plano complejo, es necesario tener en cuenta la fase ϕ, valor que no conocemos.

Cálculo del capacitor

Reescribo la ecuación (1)

$$V_{ef} = I_{ef} e^{j\phi} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \tag{2}$$

Ver que $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ puede expresarse también función de su módulo y fase, es decir, $Z = |Z| e^{j\phi_z}$, donde

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ \\ \phi_z = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) \end{cases}$$

Cálculo del capacitor

Reescribo la ecuación (1)

$$V_{ef} = I_{ef} e^{j\phi} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \tag{2}$$

Ver que $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ puede expresarse también función de su módulo y fase, es decir, $Z = |Z| e^{j\phi_z}$, donde

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ \\ \phi_z = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) \end{cases}$$

Luego, obtenemos

$$V_{ef} = |Z| I_{ef} e^{j(\phi + \phi_z)} \tag{3}$$

Cálculo del capacitor

Al igualar módulos, se obtiene:

$$|V_{ef}| = |Z| I_{ef}$$

Cálculo del capacitor

Al igualar módulos, se obtiene:

$$|V_{ef}| = |Z| I_{ef}$$

Haciendo las cuentas y despejando se llega a:

$$C = \frac{1}{\omega\left[\omega L \pm \sqrt{\frac{V_{ef}^2}{I_{ef}^2} - R^2}\right]}$$

La raíz negativa se descarta ya que da como resultado un valor de $C < 0$. Tomando la raíz positiva, y siendo $V_{ef} = 220\,\mathrm{V}$, obtenemos $C = 7.25\,\mu\mathrm{F}$.

Cálculo de la impedancia

Reemplazando en los valores del módulo y fase de la impedancia, obtenemos:

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = 345.7\,\Omega \\ \\ \phi_z = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) = -54{,}4^\circ \end{cases}$$

Cálculo de la impedancia

Reemplazando en los valores del módulo y fase de la impedancia, obtenemos:

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = 345.7\,\Omega \\ \\ \phi_z = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) = -54{,}4^\circ \end{cases}$$

Ver que de la ecuación (3) se desprende que $\phi + \phi_z = 0$ ya que la fase de la tensión es 0 ($1 = e^{j0}$). Por lo tanto, $\phi = -\phi_z$.

Cálculo de los valores instantáneos

Para obtener los valores instantáneos, necesitamos hacer explícita la dependencia temporal en la ecuación (1). Multiplicamos entonces por $e^{j\omega t}$:

$$V_{ef}\, e^{\omega t} = I_{ef}\, e^{j(\omega t+\phi)} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

La corriente instantánea será la parte real o imaginaria de acuerdo a la función de la fuente. Como no aclara en este caso, tomo la parte real:

$$i(t) = \Re\{\sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t+\phi)}\} = \sqrt{2} I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud está expresada en función de la corriente pico, que será el valor de los extremos que alcanza la función cos(.).

Cálculo de los valores instantáneos

La tensión $v_R(t)$ será simplemente $v_R(t) = i(t)R$. La tensión sobre el capacitor podemos calcularla de la siguiente forma: sabemos que la tensión en el capacitor en el plano complejo es

$$V_{ef,C} = I_{ef} e^{j\phi}[-j\frac{1}{\omega C}] \underbrace{=}_{-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}} \frac{I_{ef}}{\omega C} e^{j(\phi-\frac{\pi}{2})}$$

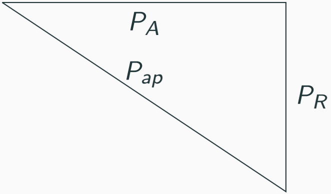
Nuevamente multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando parte real, obtenemos:

$$v_C(t) = \frac{\sqrt{2} I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t + (\phi - \frac{\pi}{2})\right) \tag{4}$$

Balance de potencias

Al ser un circuito RLC, donde hay resistencia, capacitor e inductor, la potencia total puede dividirse en dos: potencia activa, es decir, transferencia de energía del generador al circuito y potencia reactiva, que corresponde a la potencia que se conserva entre el capacitor e inductor.[1]

$$\begin{cases} P_A = V_{ef} I_{ef} \cos(\phi) = 81.96\,\mathrm{W} \\ P_R = V_{ef} I_{ef} \sin(\phi) = 114.48\,\mathrm{VAR} \\ P_{ap} = V_{ef} I_{ef} = 140.8\,\mathrm{W} \end{cases}$$



[1] $P_{inst}(t) = P_A[1 + \cos(2\omega t)] - [P_R]\sin(2\omega t)$, entonces si $\phi > 0$ (en nuestro caso $\phi = 54{,}4^\circ$), entonces el triángulo se dibuja invertido.