# Enunciado

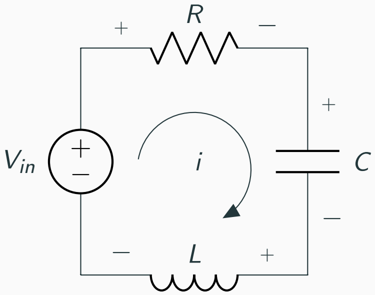
**6.** Considere un circuito serie constituido por un resistor R =10 Ω, una inductancia L = 40 mH y un capacitor C =200 μF (inicialmente descargado). En el instante t = 0 (cuando los elementos reactivos no almacenan energía de campo), se aplica entre extremos un voltaje constante E =100 V.

a) Escriba la ley de Kirchoff para la malla y encuentre la función temporal de la corriente $i(t)$.

b) ¿Qué valor de C produce amortiguamiento crítico?

c) ¿Qué sucede si se disminuye el valor de C a la mitad del correspondiente a la condición de amortiguamiento crítico?

# Circuito




Relaciones entre corrientes y tensiones para cada componente:

$$\begin{cases} v(t) = i(t)R \\ i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

# Ecuación de malla

Dadas las tensiones en cada componente, planteamos la ecuación de Kirchoff:

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0 \tag{1}$$

# Ecuación de malla

Dadas las tensiones en cada componente, planteamos la ecuación de Kirchoff:

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0 \tag{1}$$

Reemplazamos las tensiones en cada componente, teniendo en cuenta que al ser una única malla, la corriente es la misma para los 3 componentes:

$$v(t) - i(t)R - \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

$$i(t)R + \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) \tag{3}$$

# Ecuación de malla

Dadas las tensiones en cada componente, planteamos la ecuación de Kirchoff:

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0 \tag{1}$$

Reemplazamos las tensiones en cada componente, teniendo en cuenta que al ser una única malla, la corriente es la misma para los 3 componentes:

$$v(t) - i(t)R - \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

$$i(t)R + \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) \tag{3}$$

Nos queda una ecuación diferencial de segundo orden. La solución será $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$.

# Ecuación homogénea

Buscamos primero la solución homogénea, la cual corresponde al transitorio del circuito RLC. (Esto se puede ver al pedir que $\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$ o también pensar como el tiempo que tarda en llegar el sistema al equilibrio).

$$i(t)R + \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4}$$

# Ecuación homogénea

Buscamos primero la solución homogénea, la cual corresponde al transitorio del circuito RLC. (Esto se puede ver al pedir que $\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$ o también pensar como el tiempo que tarda en llegar el sistema al equilibrio).

$$i(t)R + \left[\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + V_C(0)\right] + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4}$$

Derivamos respecto del tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}R + \frac{1}{C}i(t) + L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \to \frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i(t) = 0 \tag{5}$$

Definimos $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ y $2\alpha = \frac{R}{L}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i(t) = 0 \tag{6}$$

# Solución a la ecuación homogénea

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden. Para resolver esta ecuación, utilizamos el operador diferencial $Df = f'$. Luego,

$$D^2 i(t) + 2\alpha D i(t) + \omega_0^2 i(t) = 0 \to (D^2 + 2\alpha D + \omega_0^2 Id) i(t) = 0 \quad (7)$$

Vemos que quedó un polinomio $D^2 + 2\alpha D + \omega_0^2 Id$, el cual tiene que ser igual a 0 (ya que caso contrario obtendríamos la solución trivial). Al ser un polinomio de grado 2, tendrá dos raices $\lambda_1, \lambda_2$, de forma tal que puede expresarse como $(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) = 0$

Por últimos, recordemos que
$(D - \lambda I) f(t) = 0 \to f'(t) = \lambda f(t) \to f(t) = e^{\lambda t}$.

# Raíces de la solución

Debido a que la solución es que $(D - \lambda_1 I) = 0$ o $(D - \lambda_2 I) = 0$, la solución será $i_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$. Buscamos entonces las raices, lo que nos da:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \\ \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

Definimos el factor de amortiguamiento $\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$. Luego:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\omega_0 \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ \\ \lambda_2 = -\omega_0 \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

# Posibles soluciones - Tipos de sistema

Aparecen 3 casos de acuerdo al valor del factor de amortiguamiento. Los tres casos vienen dado por el valor del término dentro de la raíz:

$$\begin{cases} \xi^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Raices reales, sobre amortiguado} \\ \\ \xi^2 - 1 < 0 \rightarrow \text{Raices complejas, sub amortiguado} \\ \\ \xi^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Raices iguales, amortiguado crítico} \end{cases}$$

Nos enfocamos en el caso de amortiguamiento crítico, ya que es el que piden en el ejercicio. Esto implica $\xi = 1$ (el valor negativo se descarta ya que $\xi > 0$), y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\omega_0\xi$. Vemos que en principio nos queda $i_h(t) = (A_1 + A_2)e^{\lambda t}$. Sin embargo, necesitamos dos funciones LI para describir la solución; proponemos $i_h(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$.

# Solución particular

Resta hallar la solución particular $i_p(t)$. Debido a que la fuente utilizada es una fuente constante, la solución que se propone es $i_p(t) = B$. Finalmente tenemos

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = A_1 e^{-\omega_0 \xi t} + A_2 t e^{-\omega_0 \xi t} + B \tag{8}$$

Vemos que para $t \to \infty$, la parte homogénea se hace 0. Entonces, $\lim_{t \to \infty} i(t) = B$. Pero este valor tiene que ser igual a 0, ya que una vez que se superó el transitorio y el capacitor se cargó, ya no circula mas corriente por la malla. Por lo tanto, $B = 0$

$$i(t) = A_1 e^{-\omega_0 \xi t} + A_2 t e^{-\omega_0 \xi t} \tag{9}$$

# Constantes de la solución homogénea

Para hallar las constantes $A_1, A_2$ analizamos las condiciones iniciales del circuito. En primer lugar, $i(0) = 0$, ya que no había tensión aplicada. Por lo tanto:

$$i(0) = A_1 = 0 \rightarrow A_1 = 0 \tag{10}$$

Nos falta la condición sobre $i'(0) = A_2[e^{-\omega_0 \xi t} - t\omega_0 \xi e^{-\omega_0 \xi t}]|_{t=0} = A_2$. Volvemos a la ecuación de malla:

$$\left( i(t)R + V_C + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \right)\Bigg|_{t=0} = 100\,\mathrm{V} \tag{11}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t} = 100\,\mathrm{V} \rightarrow A_2 = \frac{100\,\mathrm{V}}{L} \tag{12}$$

Finalmente, $i(t) = \frac{100\,\mathrm{V}}{L} te^{-\omega_0 \xi t}$.

# Cálculo de C para amortiguamiento crítico

Vimos que el amortiguamiento crítico sucede si $\xi = 1$, lo que implica que $\alpha = \omega_0$. Reemplazando por los valores correspondientes, obtenemos:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \tag{13}$$

$$C = \frac{4L}{R^2} \tag{14}$$

SIMULACIÓN (C=1.6 μF).

# Comportamiento cuando cambia C

Para analizar que sucede si cambia el valor de C respecto del amortiguamiento crítico, recordemos que lo hay que analizar es $\xi^2 - 1 \lesseqgtr 0$. Entonces, siendo $C_{ac}$, tenemos

$$\omega_{0_{ac}} = \frac{1}{\sqrt{LC_{ac}}} \tag{15}$$

En particular, si el nuevo $C$ es $\frac{C_{ac}}{2}$, tenemos que el nuevo valor de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC_{ac}}}$. Luego, $\omega_0 > \omega_{0_{ac}}$, y por lo tanto, tenemos

$$\alpha^2 = \omega_{0_{ac}} < \omega_0^2 \rightarrow \alpha^2 < \omega_0^2 \tag{16}$$

que corresponde a $\xi < 1$, es decir, un sistema sub-amortiguado.

# Solución sistema sub-amortiguado

Para este caso, las raíces son complejas:
$\lambda_{1,2} = -\omega_0\xi \pm \imath\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm \imath\omega_d$. Luego, la solución será ($i_p(t)$ no cambia):

$$i(t) = A_1 e^{(-\sigma - j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\sigma + j\omega_d)t} \tag{17}$$

$$i(t) = \underbrace{e^{-\sigma t}}_{f_1(t)} \underbrace{\left(A_1 e^{-\imath\omega_d t} + A_2 e^{\imath\omega_d t}\right)}_{f_2(t)} \tag{18}$$

Recordando que $e^{\imath\alpha} = \cos(\alpha) + \imath\sin(\alpha)$, obtenemos:

$$f_2(t) = \underbrace{(A_1 + A_2)}_{K_1}\cos(\omega_d t) + \imath\underbrace{(A_2 - A_1)}_{K_2}\sin(\omega_d t) \tag{19}$$

Luego,

$$i(t) = \underbrace{e^{-\sigma t}}_{f_1(t)} \underbrace{\left(K_1\cos(\omega_d t) + K_2\sin(\omega_d t)\right)}_{f_2(t)} \tag{20}$$

# Solución sistema sub-amortiguado

Usando nuevamente las condiciones de borde:

$$i(0) = K_1 = 0 \tag{21}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t} = LK_2\omega_d = 100\,\mathrm{V} \rightarrow K_2 = \frac{100\,\mathrm{V}}{L\omega_d} \tag{22}$$

Reemplazando:

$$i(t) = e^{-\sigma t}\left(\frac{100\,\mathrm{V}}{L\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t)\right) \tag{23}$$

SIMULACIÓN.