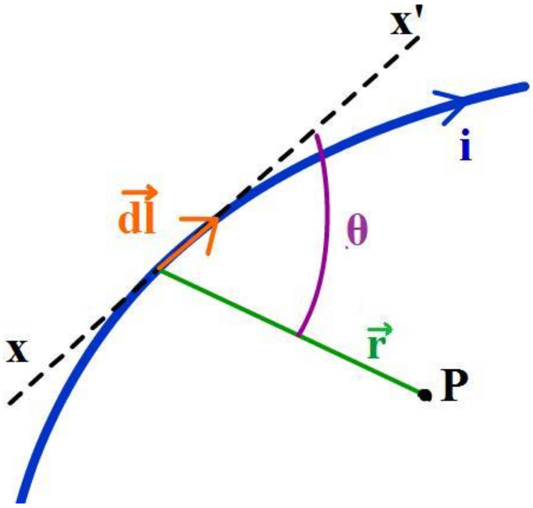
Problemas de Biot-Savart

Notacion: Usaremos letras negritas para los vectores. El producto vectorial se denotará por X o también por $\wedge$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\tilde{\vec{dl}}' \wedge \vec{r}}{r3}$$

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{dl}'x\hat{r}}{r2}$$

donde

$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7} Tm/A$**,** es la permeabilidad magnética del vacío.

Aqui

r es la distancia entre el punto punte y el punto campo, y $\hat{r}$, es el versor que apunta desde el elemento de corriente Idl' (punto fuente) hasta el punto donde quiero calcular el campo.

Otra forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathbf{dl} \wedge (\mathbf{r} - r')}{|\mathbf{r} - r'|^3}$$

Aqui

r es el punto campo.

r' es el punto fuente .

Segmento de espira Circular de radio R, campo en el eje :

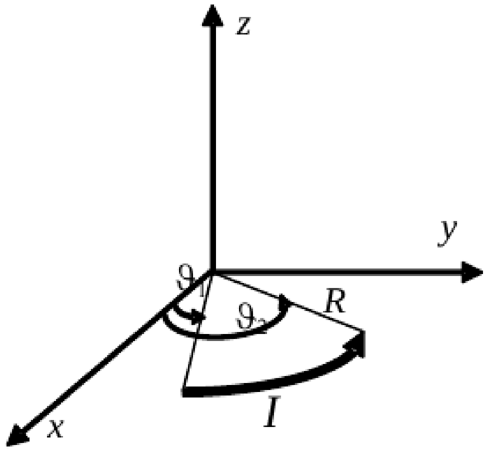
(problema 3)

3. a) Calcular el campo B generadopor un tramo de conductor

en forma de arco de circunferenciade radio R que lleva una corriente I uniforme y constante,

como indica la figura.

b) Idem a) para una espira circular.

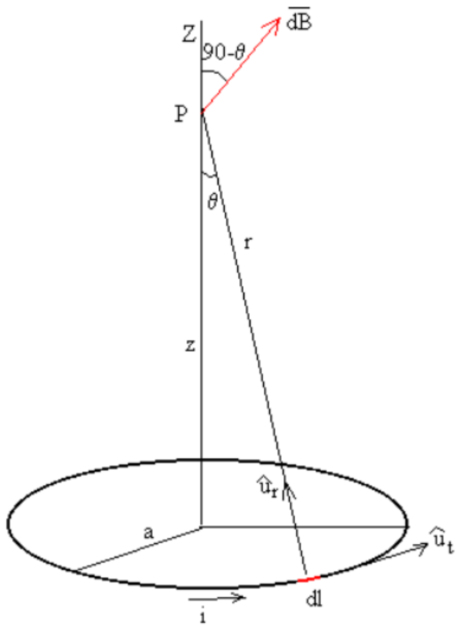


Cálculo en componentes cartesianas.

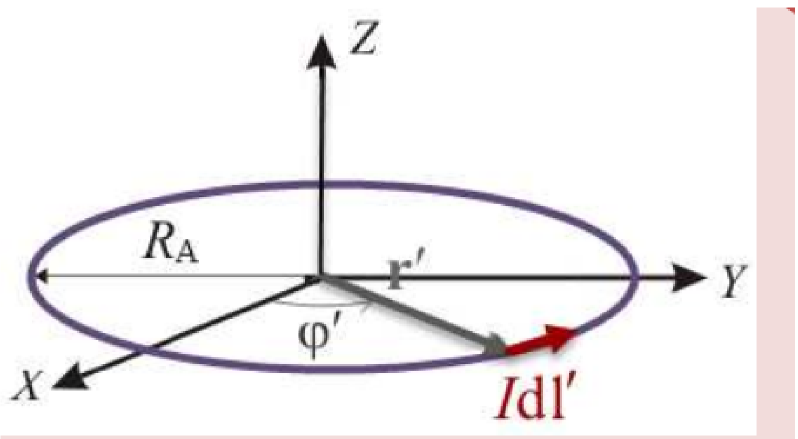
$$\mathbf{r} = (0, 0, z) = 0\hat{x} + 0\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\mathbf{r}' = (Rcos\phi', Rsen\phi', 0)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-Rcos\phi', -Rsen\phi', z)$$



La corriente es tangente al circulo (puede ser horario o antihoraria, es decir puede apuntar en $\hat{\phi}$ o al revés)



$$I\mathbf{dl}' = Idl'\hat{\phi} = IRd\phi'\hat{\phi}$$

el versor $\hat{\phi}$, no está en cartesianas. Hay que pasarlo.

(Regla fácil: el $\hat{\phi}$ es el derivado de $\hat{\mathbf{r}}$)

$$\hat{\mathbf{r}} = (cos\phi, sen\phi, 0) \Rightarrow \hat{\phi} = (-sen\phi, cos\phi, 0)$$

Hacemos el producto vectorial:

$$I\mathbf{dl}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = IRd\phi' \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -sen\phi & \cos\phi & 0 \\ -Rcos\phi & -Rsen\phi & z \end{vmatrix}$$

$$= IRd\phi' \left[cos\phi' z\hat{x} + sen\phi' z\hat{y} + R\hat{z}\right]$$

Entonces:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{IR(cos\phi' z, sen\phi' z, R)d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

osea:

(IMPORTANTE: lo que hacemos es integrar en una base fija (cartesiana) porque los versores se pueden ‘sacar de la integral’)

$$B_x\hat{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{IRcos\phi' zd\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\hat{x} == \frac{IRz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[\int_{\phi_i}^{\phi_f} cos\phi' d\phi'\right] \hat{x}$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{IRsen\phi' z d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{IRz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_{\phi_i}^{\phi_f} sen\phi' d\acute{p}hi'$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{IR^2 d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}(\phi_f - \phi_i)$$

Vemos que el caso de la espira completa se puede obtener facilmente :

$B_x = B_y = 0$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

PREGUNTA: puedo hacerlo en otro sis tem de coordenadas ?? Solo con mucho cuidado.

$$I\mathbf{dl}' = Idl'\hat{\phi} = IRd\phi'\hat{\phi}$$

$\mathbf{r} = (0, 0, z)$
$\mathbf{r}' = (Rcos\theta, Rsen\theta, 0) = R\hat{r}$
$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\hat{r} + z\hat{z}$

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\phi\hat{\phi}\wedge(-R\hat{r})}{(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\phi\hat{\phi}\wedge z\hat{z}}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$\hat{r}\wedge\hat{\theta} = \hat{z}$
$\hat{\theta}\wedge\hat{z} = \hat{r}$
$\hat{z}\wedge\hat{r} = \hat{\theta}$

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2 d\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRzd\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{r}$$

el primer término se integra fácil, porque z-versor es un versor fijo, el r-versor varia y no lo puedo integrar a menos que lo pase a cartesianas !!.

En el caso particula z=0, la imtegral (y el campo) se calculan facilmente.

Problema:

Solenoide Finito de N vueltas y longitud L-

Lo pienso como N espiras una arriba de la otra.

Consideremos un elemento del solenoide de altura dz’. Como n=N/L es la densidad de espiras (es decir la cantidad de espiras por unidad de longitud) en ese pedacito hay ndz’ vueltas de alambre por lo tanto, la corriente de la espira equivalente esta relacionada con la verdadera espira por:

$$I_{esp} = \frac{N}{L} i_{verd} dz'$$

si la espira está ubicada en el plano z’=0

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} I_{esp} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} i \frac{N}{L} dz'$$

pero ahora la espira esta a una a altura z’. Entonces hago una traslación $z ---->(z-z')$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{N}{L} i R^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}} dz'$$

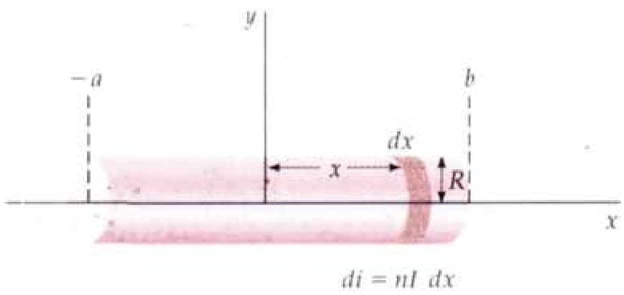


Figura 25-12 Geometría para el cálculo del campo magnético dentro de un solenoide sobre el eje. El número de vueltas en el elemento dx es $n\,dx$, en donde $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El elemento dx se trata como una espira de corriente que transporta una corriente $di = nI\,dx$.

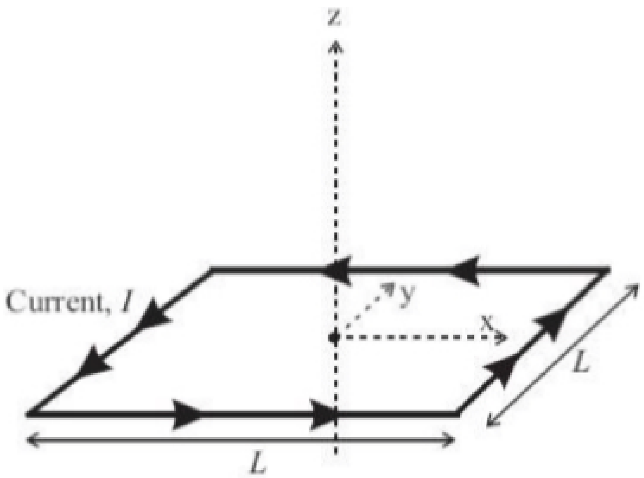
tarea hacer la integral y completar el ejercicio.

Campo Magnético de la espira cuadrada en el eje.

PROBLEMA 2.

Por la periferia de un cuadrado de lado L=20 cm circula una corriente I= 5 mA.

a) Calcular el campo magnético en puntos sobre la recta perpendicular al plano del cuadrado y que pasa por la intersección de las diagonales.



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathbf{dl} \wedge (\mathbf{r} - r')}{|\mathbf{r} - r'|^3}$$

siempre

$$\mathbf{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}$$

lado 1: y=-L/2

$$I\mathbf{dl_1} = Idx\hat{x}$$

$$\mathbf{r'} = (x', -L/2, 0)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r'}) = (-x', L/2, z)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3 = (x'^2 + L^2/4 + z^2)^{3/2}$$

Lado 3: y=+L/2

$$I\mathbf{dl_3} = -Idx\hat{x}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r'} = (-x', -L/2, z)$$

$$I\mathbf{dl'}_1 \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r'}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ Idx' & 0 & 0 \\ -x' & L/2 & z \end{vmatrix}$$

es como cambiar dx por -dx ,

y L/2 →(-L/2)

$= -Izdx'\hat{y} + IL/2dx'\hat{z}$ $\qquad$ $= +Izdx'\hat{y} + IL/2dx'\hat{z}$

Entonces

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{.L/2}^{L/2}\frac{(0,-z,L/2)dx'}{(x'^2+L^2/4+z^2)^{3/2}}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} z\int_{.L/2}^{L/2}\frac{dx'}{(x'^2+L^2/4+z^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{L}{2}\int_{.L/2}^{L/2}\frac{dx'}{(x'^2+L^2/4+z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}_1 = -B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

en cambio

$$\mathbf{B}_3 = +B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

Ahora podemos calcular B2 y B4. Hace falta hacer toda la cuenta ???.

$$\mathbf{B}_2 = -B_x\hat{x} + B_z\hat{z}$$

$$\mathbf{B}_4 = B_x\hat{x} + B_z\hat{z}$$

$$\mathbf{B}_T = 4B_z\hat{z}$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{L^2}{(z^2+L^2/4)}\frac{1}{\sqrt{L^2/2+z^2}}$$

Verificar .