Notación:

- $\mathbf{V} \equiv \vec{V}$ (Significa que cuando pongo una variable en negrita equivale a una magnitud vectorial)
- $\mathbf{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
- r es el radio en coordenadas cilíndricas (Es diferente al r de arriba, ya que este no está en negrita).
- $\mathbf{r}$ es el punto campo y $\mathbf{r}'$ es el punto fuente.

Enunciado

Se tiene una distribución de carga muy grande y densidad uniforme $\sigma = -4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}$, en el plano xy. Con centro en el punto $(0,0,0)$m se realizó un orificio circular de Radio $R = 3\,\mathrm{cm}$.

1. Calcular el campo eléctrico sobre el eje Z. Desestime efectos de borde.
2. Calcular el trabajo que un agente externo debe realizar para trasladar una carga $q_0 = 1.8\,\mathrm{\mu C}$ desde $P = (0,0,25)$cm hasta $-2P$.

Índice

1. Cálculo del campo eléctrico

1.1. Cálculo usando Gauss

En primer lugar, hagamos un dibujo del escenario.

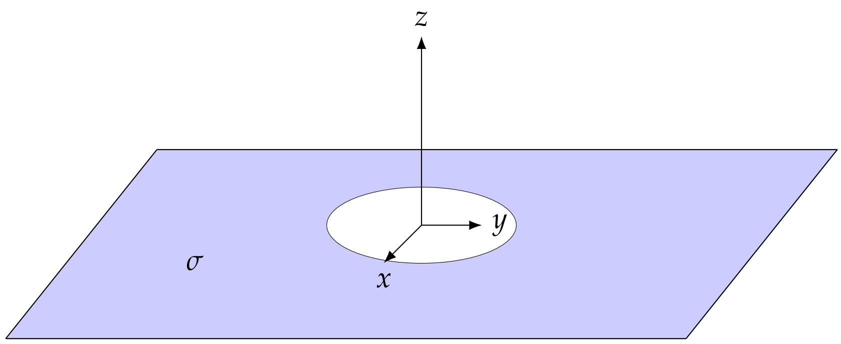

Figura 1 – Esquema de la distribución de carga

A partir de la figura 1, vemos que calcular el campo por utilizando la Ley de Gauss, ya que no resulta tan clara que superficie tomar para poder utilizar condiciones de simetría; de hecho, basta con hacer el análisis geométrico sobre un un eje paralelo al z (que no sea el z, por ejemplo uno donde $y \prec 0$ y $x = 0$) y ver que dado un $\mathrm{d}q_1$, no hay otro $\mathrm{d}q_2$ de forma tal que la suma de los $\mathrm{d}E$ tenga solo componente en la dirección $\hat{k}$. Sin embargo, hay algo que no tiene que hacer ruido y es que el cálculo del campo eléctrico tanto para una distribución de cargas dada por un plano infinito como para un disco lo sabemos hacer. Esto nos quiere decir que, tal vez, es posible transformar el problema en uno que conozcamos. Entonces, ¿cómo hacer eso?

Bien, tenemos que recurrir a un principio fundamental para el cálculo del campo eléctrico, y este es el principio de superposición: el campo eléctrico total debido a un conjunto de cargas es la suma del campo eléctrico generado por cada una de las distribuciones. A partir de esto, y usando un poco el ingenio, vemos que la distribución puede expresarse de la siguiente forma:

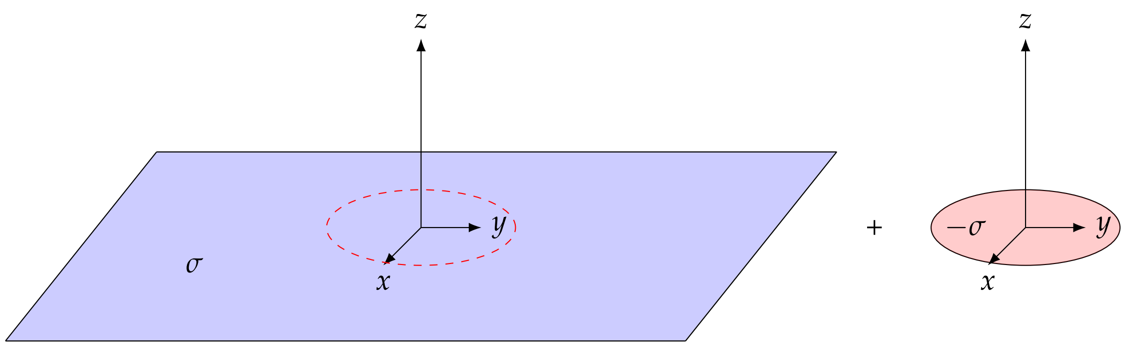

Figura 2 – Esquema de la distribución de carga equivalente

donde los sistemas de coordenadas son los mismos(ya que el agujero está en el centro); además, las lineas punteadas rojas son solo para mostrar que ahí estaba el agujero (ahora hay solo carga positiva, es un plano infinito con distribución uniforme). Queda claro que la distribución de carga de la figura 2 es equivalente a la de la Figura 1, ya que en la zona del disco en este nuevo esquema se tiene la suma $\sigma + (-\sigma)$. Sin embargo, logramos transformar el problema del cálculo del campo eléctrico total para un escenario desconocido en dos subproblemas conocidos. Calculemos entonces el campo eléctrico de los subproblemas.

1.1.1. Cálculo del campo eléctrico de un plano infinito

Lo primero que hacemos es hacer el análisis geométrico para poder determinar la dependencia funcional del campo eléctrico con las variables del sistema de coordenadas y la dirección del campo.

En primer lugar, tenemos una densidad uniforme en todo el plano, lo que nos permite hacer el siguiente análisis. Entonces, analizamos primero el campo en el eje z. Para eso, tomamos dos cargas infinitesimales equidistantes respecto al eje z:

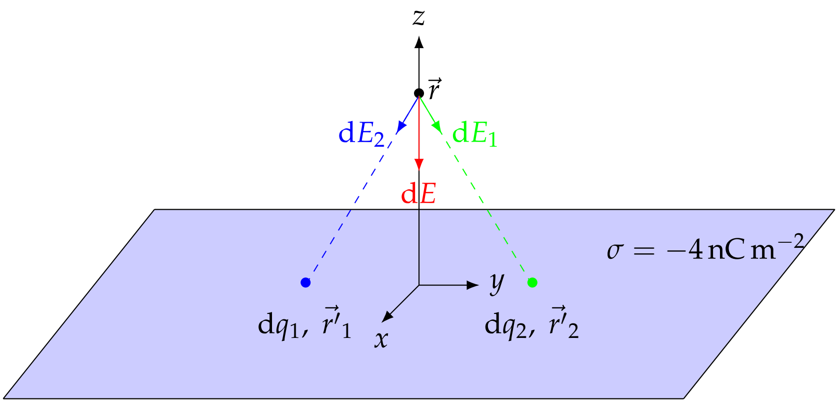

Figura 3 – Análisis de la dirección del campo eléctrico para un plano infinito.

Vemos que el campo tiene dirección en Z, es decir, perpendicular al plano. Además, si tomamos dos cargas para los mismos valores de y pero para otros valores de x y calculamos el campo en el eje Z, tendremos otro par de cargas para el x opuesto y equidistante de forma tal que la suma vectorial de un vector cuya dirección es en z. Analizado sobre el eje z, vemos que esto se replica para todo punto del plano xy. Por lo tanto el plano es perpendicular para todo punto del plano. Por último, debido a que el plano es infinito, para todo punto existirá otro equidistante de forma tal que el campo tenga dirección perpendicular (no hay efectos de borde).

Por lo tanto, en principio tenemos:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_z(z) \cdot \hat{k}. \tag{1}$$

Hecho el análisis, vemos que hay dos posibles superficies gaussianas que nos va a permitir utiliza la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico: un cilindro con eje en Z o un paralelepípedo (nombre cheto para un rectángulo en 3-D). Utilicemos el paralelepípedo, de dimensiones x_G, y_G y z_G en cada eje respectivamente.

Tenemos entonces la siguiente situación:

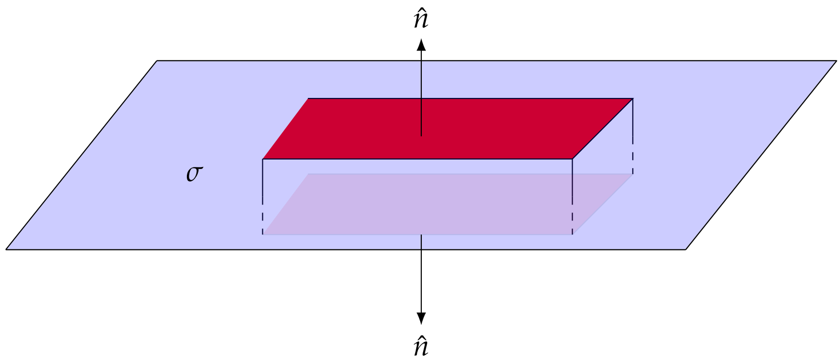

Figura 4 – Esquema de la elección de la superficie gaussiana para el plano infinito cargado.

donde no se pusieron los ejes para que el dibujo sea mas claro (los ejes son los mismos que usaron desde el principio). Plantemos entonces la ley de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \tag{2}$$

Calculemos primero la carga encerrada, que va a venir dado por la carga encerrada por la superficie gaussiana. La carga viene dada por la parte de la carga superficial encerrada por el paralelepípedo [1]:

$$Q_{enc} = \sigma x_G y_G. \tag{3}$$

Calculada la carga, resta obtener calcular la integral del flujo del campo eléctrico. En primer lugar, veamos que la integral sobre la superficie puede separarse en las distintas caras: para la cara que se encuentra sobre el plano xy $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, mientras que para las caras laterales tenemos $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{x}\mathrm{d}S$ o $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{y}\mathrm{d}S$. Entonces:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_{\mathcal{S}} E_z(z)\hat{k} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{4}$$

Queda claro que solo para el caso de las caras paralelas a la distribución de carga la integral es distinta de 0, ya que para el resto de las capas el producto escalar entre la dirección del campo y la normal es 0. Luego:

$$\iint_{\mathcal{S}_{z\succ 0}} E_z(z) \underbrace{-\hat{k} \cdot \hat{k}}_{=-1} \mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}_{z\prec 0}} E_z(z) \underbrace{\hat{k} \cdot -\hat{k}}_{=-1} \mathrm{d}S = -2E_z(z) x_G y_G, \tag{5}$$

donde el menos en la zona $z \succ 0$ aparece por el análisis geométrico hecho (ver Figura 3). Finalmente, reemplazando en la ecuación (2), obtenemos

$$-2E_z(z) x_G y_G = \frac{\sigma x_G y_G}{\epsilon_0} \to E_z(z) = E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \tag{6}$$

[1] Formalmente, Q_{enc} es la carga encerrada por el volumen cuya superficie es la gaussiana, debiéndose calcular una integral triple. Esto puede generar ruido al querer integrar en la variable z. Sin embargo, esto tiene solución pero escapa el alcance de este curso.

donde se observa que la magnitud del campo no depende de z. Finalmente, tenemos que agregar la dirección del campo, la cual obtuvimos previamente con el análisis geométrico (Figura 3):

$$\mathbf{E}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{k}, & z \prec 0 \\ \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{k}. & z \succ 0 \end{cases} \tag{7}$$

Observar que para $z = 0$ el campo no está definido. Además, ver que $\sigma \prec 0$, por lo que la dirección del campo está bien definida (se corresponde con el análisis geométrico hecho)

1.1.2. Cálculo del campo generado por un disco

En este caso, nuevamente analizamos la dirección a partir del análisis geométrico.

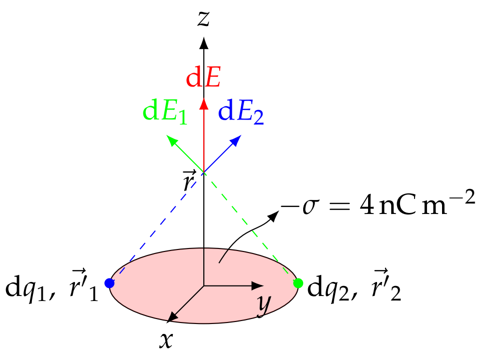

Figura 5 – Esquema - Disco cargado

En este caso, resulta conveniente enfocarnos en el cálculo sobre el eje Z, ya que para el resto de los casos habrá mas de una componente del campo no nula. Vemos que sobre el eje z, el campo tiene dirección en z, ya que para todo punto existe otro opuesto respecto del eje z de forma tal que la suma vectorial de los campos generados por dichas cargas tiene dirección en z (ver Figura 5). Además, observar que no es práctico pensar en aplicar la ley de Gauss, ya que no hay una superficie que facilite el cálculo del campo utilizando condiciones de simetría. Entonces, calcularemos el cálculo por definición (usando la fuerza de Coulomb).

Entonces, recordar que el campo se define como $\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{\mathbf{F}(x,y,z)}{q}$. Entonces:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathrm{d}q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{8}$$

Ver que se expresó un diferencial de campo eléctrico, ya que estamos definiendo el campo para un diferencial de carga. Luego, el campo eléctrico total será la "sumaïnfinitesimal de todos los diferenciales de carga. Esto es:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathrm{d}q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{9}$$

Reemplazando $\mathrm{d}q = -\sigma \mathrm{d}S'$:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\sigma \mathrm{d}S'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{10}$$

Ver que la expresión en (23) son tres integrales (para x, y y z). Sin embargo, nosotros calcularemos solo sobre el eje z, y vimos previamente que la dirección del campo es en z. Por lo tanto, solo debemos calcular una de las tres integrales. Además, $\mathbf{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $\mathbf{r}' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\sigma \mathrm{d}S' z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \hat{k}, \tag{11}$$

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S' z}{((-x')^2 + (-y')^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}. \tag{12}$$

En nuestro caso, la superficie de integración se encuentran en el plano xy. Además, resulta conveniente trabajar en coordenadas cilíndricas debido a que se está trabajando con un disco cargado. Tenemos entonces $r'^2 = x'^2 + y'^2$ y $\mathrm{d}S' = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'$. Finalmente:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{-\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}, \tag{13}$$

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{-\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{k}, \tag{14}$$

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left[\mathrm{sgn(z)} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{k}, \tag{15}$$

donde $\mathrm{sgn}(z)$ es la función signo: si $z \succ 0$ la función es igual a 1, si $z \prec 0$ la función tomar el valor -1. Recordar además que $-\sigma = 4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}$, por lo que la dirección del campo coincide con la del dibujo de la Figura 5.

1.1.3. Calculo del campo total

Aplicando superposición, obtenemos que sobre el eje z el campo total es

$$\mathbf{E}_T(0,0,z) = \mathbf{E}_{\text{plano}}(0,0,z) + \mathbf{E}_{\text{disco}}(0,0,z), \tag{16}$$

$$\mathbf{E}_T(0,0,z) = \left\{ \mathrm{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} \left[\mathrm{sgn(z)} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \right\} \hat{k}, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}_T(0,0,z) = \left\{ \mathrm{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathrm{sgn(z)} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\} \hat{k}, \tag{18}$$

$$\mathbf{E}_T(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{k}, \tag{19}$$

$$\mathbf{E}_T(0,0,z) = \frac{-4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(3\,\mathrm{cm})^2 + z^2}} \hat{k}. \tag{20}$$

1.2. Cálculo usando la fuerza de Coulomb

Para calcular el campo por Coulomb trabajando con la superficie original (plano con el agujero), escribimos en primer lugar la expresión del campo generado por un diferencial de carga:

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{21}$$

Ver que se expresó un diferencial de campo eléctrico, ya que estamos definiendo el campo para un diferencial de carga. Luego, el campo eléctrico total será la "sumaïnfinitesimal de todos los diferenciales de carga. Esto es:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{22}$$

Reemplazando $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S'$:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{23}$$

Ver que la expresión en (23) son tres integrales (para x, y y z). Sin embargo, nosotros calcularemos solo sobre el eje z, y vimos previamente que la dirección del campo es en z. Por lo tanto, solo debemos calcular una de las tres integrales. Además, $\mathbf{r} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + z\hat{k}$ y $\mathbf{r}' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S' z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\hat{k}, \tag{24}$$

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}S' z}{((-x')^2 + (-y')^2 + z^2)^{3/2}}\hat{k}. \tag{25}$$

Queda claro que conviene expresar la integral en cilíndricas: $\mathbf{r}$ queda igual, $\mathbf{r}' = r'\cos(\phi)\hat{\imath} + r'\sin(\phi)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ y $\mathrm{d}S' = r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$. Luego:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}, \tag{26}$$

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{\infty} \frac{r'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}, \tag{27}$$

Resolviendo la integral por tabla:

$$E_z(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{z^2+r'^2}}\right]\Bigg|_R^{\infty}, \tag{28}$$

$$E_z(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}. \tag{29}$$

Entonces, expresando el campo (ver que $E_z(0,0,z)$ corresponde a la componente, y hay que expresar la expresión vectorial):

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k}. \tag{30}$$

NO confundir con la notación, en este caso $\sigma = -4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}$. Ver que si reemplazamos obtenemos:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{-4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}z}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k} \tag{31}$$

que es la misma expresión que (20).

Verificacíon de que $E_x(0,0,z) = E_y(0,0,z) = 0$

Planteamos la componente en x del campo total:

$$E_x(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty\int_0^{2\pi}\frac{-r'\cos(\phi)r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = 0. \tag{32}$$

Al integrar en ϕ, se obtiene que la componente vale 0. Lo mismo sucede con la componente en y:

$$E_y(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty\int_0^{2\pi}\frac{-r'\sin(\phi)r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = 0. \tag{33}$$

2. Cálculo del trabajo

El trabajo que realiza la fuerza eléctrica viene dado por

$$W_E = q_0\int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{34}$$

Luego, el agente externo deberá hacer un trabajo positivo para mover la carga, que va a estar dado por $W_{ext} = -W_E$ y donde $a = P$ y $b = -2P$. Entonces:

$$W_{ext} = -q_0\int_P^{-2P}\mathbf{E}(0,0,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{35}$$

$$W_{ext} = -q_0\int_P^{-2P}E(0,0,z)\hat{k}\cdot\hat{k}\mathrm{d}z \tag{36}$$

$$W_{ext} = -q_0\int_P^{-2P}\frac{-4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(3\,\mathrm{cm})^2+z^2}}\mathrm{d}z \tag{37}$$

$$W_{ext} = \frac{4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}q_0}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2+(0.03\,\mathrm{m})^2}\right]\Bigg|_P^{-2P} \tag{38}$$

$$W_{ext} = \frac{4\,\mathrm{nC\,m^{-2}}1.8\,\mathrm{\mu C}}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{(-0.5\,\mathrm{m})^2+(0.03\,\mathrm{m})^2}-\sqrt{(0.25\,\mathrm{m})^2+(0.03\,\mathrm{cm})^2}\right] \tag{39}$$

$$W_{ext} = 0.1\,\mathrm{mJ} \tag{40}$$

Ver que tiene sentido, ya que de P a 0 el campo tiene la misma dirección que el desplazamiento de la partícula, por lo cual el trabajo que hace el agente externo es negativo (el campo hace trabajo positivo); esto quiere decir, que el agente externo tiene que ir frenando la carga para que no se acelere. Luego, de 0 a $-2P$ el campo hace trabajo negativo (sentido opuesto al movimiento de la partícula), por lo tanto el agente externo hace trabajo positivo. Por lo tanto, el trabajo total tiene que ser positivo.