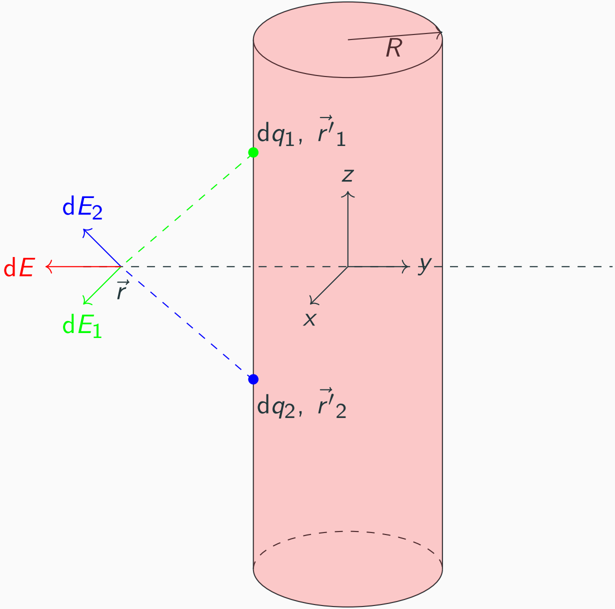
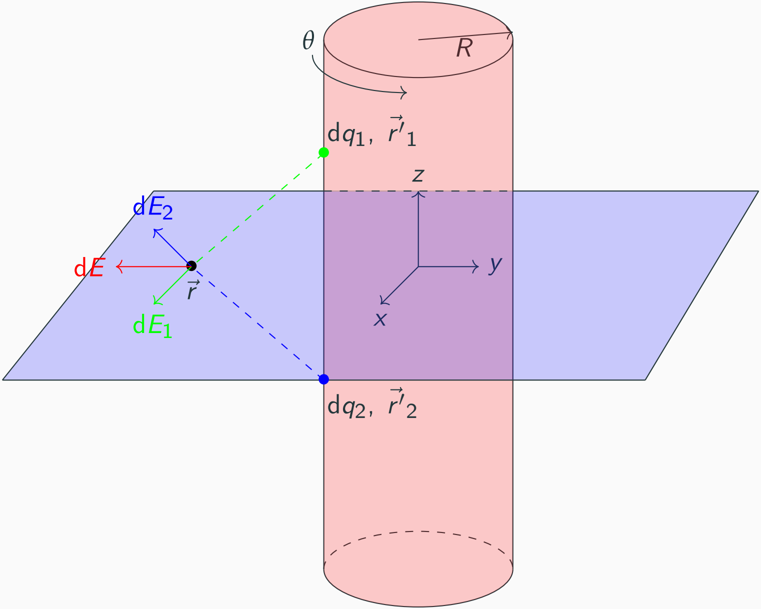
Enunciado

Hallar el campo eléctrico en todo el espacio a partir de la Ley de Gauss si se tiene un cilindro macizo infinito radio R cargado volumétricamente con una densidad de carga uniforme ρ.

Analisis geométrico




θ
R
$\mathrm{d}q_1,\ \vec{r'}_1$
z
$\mathrm{d}E_2$
$\mathrm{d}E$
y
$\vec{r}$
x
$\mathrm{d}E_1$
$\mathrm{d}q_2,\ \vec{r'}_2$

Hipótesis

Se observa que para todo punto en el plano, el campo tiene dirección perpendicular al eje del cilindro.

Hipótesis

Se observa que para todo punto en el plano, el campo tiene dirección perpendicular al eje del cilindro. Resumiendo, el escenario con esta distribución de carga posee las siguientes características:

Hipótesis

Se observa que para todo punto en el plano, el campo tiene dirección perpendicular al eje del cilindro. Resumiendo, el escenario con esta distribución de carga posee las siguientes características:

- La distribución de carga es uniforme,
- Existe simetría de revolución,
- Cilindro infinito (para cualquier $\mathrm{d}q_1$ existe otro $\mathrm{d}q_2$ equidistante al plano transversal donde se está calculando el campo).

Hipótesis

Se observa que para todo punto en el plano, el campo tiene dirección perpendicular al eje del cilindro. Resumiendo, el escenario con esta distribución de carga posee las siguientes características:

- La distribución de carga es uniforme,
- Existe simetría de revolución,
- Cilindro infinito (para cualquier $\mathrm{d}q_1$ existe otro $\mathrm{d}q_2$ equidistante al plano transversal donde se está calculando el campo).

Expresando el campo en coordenadas cilíndricas se tiene entonces:

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\cdot\hat{r} \tag{1}$$

Cálculo del campo eléctrico

A partir del análisis geométrico, se puede deducir cual es la superficie gaussiana que conviene tomar: un **cilindro** de radio r y altura l en el eje z.

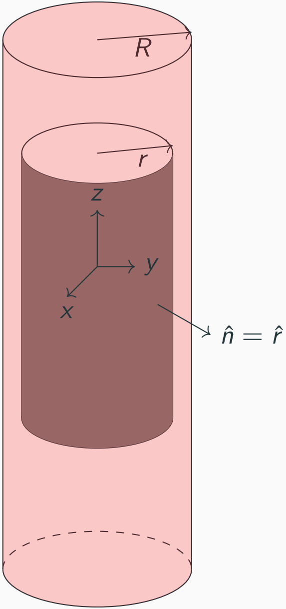
Cálculo del campo eléctrico

A partir del análisis geométrico, se puede deducir cual es la superficie gaussiana que conviene tomar: un **cilindro** de radio r y altura l en el eje z.

Debido a tener una distribución volumétrica de carga, se desprenden dos situaciones:

1. Radio de la superficie gaussiana menor al radio del cilindro cargado,
2. Radio de la superficie gaussiana mayor al radio del cilindro cargado.

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1



Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

Planteamos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r, \theta, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

Planteamos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r, \theta, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Calculamos en primer lugar la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \xrightarrow{\rho=\mathrm{cte}} Q_{enc} = \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^l r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \rho \pi r^2 l$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

Planteamos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r,\theta,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Calculamos en primer lugar la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \xRightarrow{\rho=\text{cte}} Q_{enc} = \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^l r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \rho \pi r^2 l$$

Luego, calculamos la integral del flujo del campo eléctrico. Debido a la superificie gaussiana elegida, $\mathrm{d}\vec{S} = \hat{r}\ r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z$ donde $\hat{r}$ es la normal saliente a la superficie. Además, gracias al análisis geómetrico hecho, $\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r) \cdot \hat{r}$.

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

Planteamos la ley de Gauss:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r,\theta,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Calculamos en primer lugar la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \xRightarrow{\rho=\text{cte}} Q_{enc} = \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^l r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \rho\pi r^2 l$$

Luego, calculamos la integral del flujo del campo eléctrico. Debido a la superificie gaussiana elegida, $\mathrm{d}\vec{S} = \hat{r}\ r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z$ donde $\hat{r}$ es la normal saliente a la superficie. Además, gracias al análisis geómetrico hecho, $\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\cdot\hat{r}$.

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r,\theta,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_{lat}} E_r(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\ r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z = E_r(r) 2\pi l r$$

donde $\iint_{\mathcal{S}_{Tapas}} E_r(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{z}}_{=0}\ \mathrm{d}S = 0$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$E_r(r)2\pi lr = \frac{\rho\pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 1

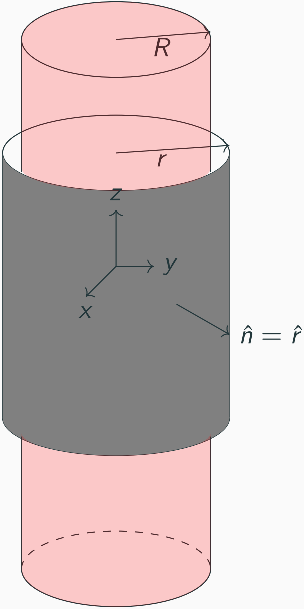
Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$E_r(r) 2\pi l r = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

Lo que da como resultado que el campo eléctrico es:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \cdot \hat{r}\ , \quad r \preceq R}$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 2



Cálculo del campo eléctrico - Caso 2

Planteamos nuevamente la ley de Gauss. Entonces, calculamos en primer lugar la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \xrightarrow{\rho=\text{cte}} Q_{enc} = \rho\pi R^2 l$$

En este caso, la carga encerrada se encuentra en el volumen dado por el cilindro de radio R; para distancias mayores, no hay carga!

Planteamos nuevamente la ley de Gauss. Entonces, calculamos en primer lugar la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \xrightarrow{\rho=\mathrm{cte}} Q_{enc} = \rho \pi R^2 l$$

En este caso, la carga encerrada se encuentra en el volumen dado por el cilindro de radio R; para distancias mayores, no hay carga!

Luego, calculamos la integral del flujo del campo eléctrico:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(r,\theta,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_{lat}} E_r(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}z = E_r(r) 2\pi l r$$

donde $\iint_{\mathcal{S}_{Tapas}} E_r(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{z}}_{=0} \mathrm{d}S = 0$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 2

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$E_r(r)2\pi l r = \frac{\rho \pi R^2 l}{\epsilon_0}$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 2

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$E_r(r)2\pi lr = \frac{\rho\pi R^2 l}{\epsilon_0}$$

Lo que da como resultado que el campo eléctrico es:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2\ r\ \epsilon_0} \cdot \hat{r}\ , \quad r \succ R}$$

Cálculo del campo eléctrico - Caso 2

Por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$E_r(r)2\pi lr = \frac{\rho\pi R^2 l}{\epsilon_0}$$

Lo que da como resultado que el campo eléctrico es:

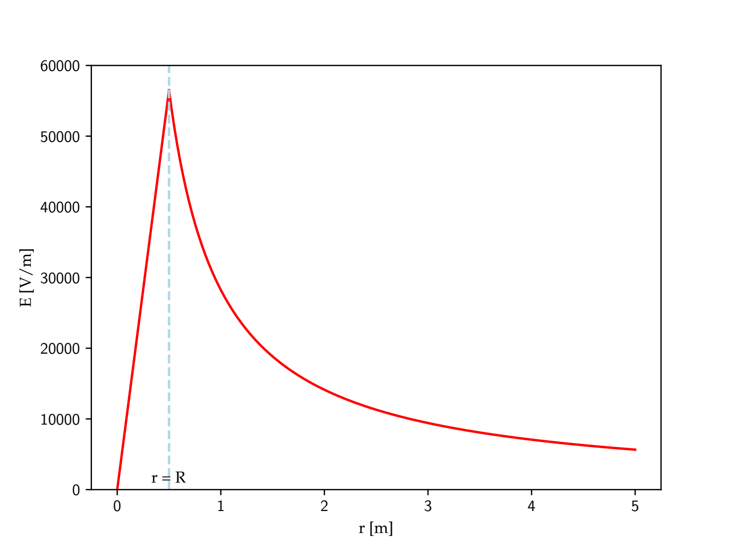
$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2\ r\ \epsilon_0} \cdot \hat{r}\ , \quad r \succ R}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico es

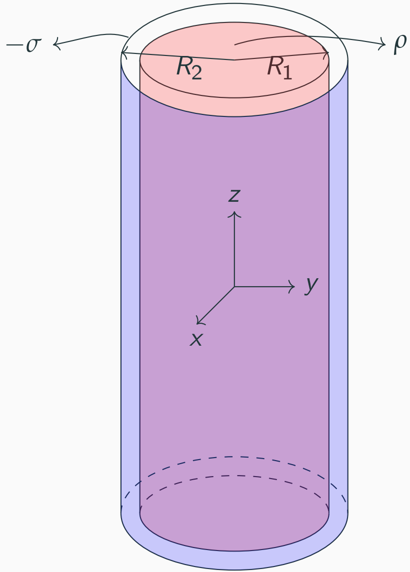
$$\boxed{\vec{E}(r) \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \cdot \hat{r}, & r \preceq R \\ \\ \frac{\rho R^2}{2\ r\ \epsilon_0} \cdot \hat{r}, & r \succ R \end{cases}}$$

Gráfico del campo eléctrico

Ejemplo: $R = 50\,\mathrm{cm}$, $\rho = 2\,\mu\mathrm{C\,m^{-3}}$



¿Cómo sería el campo total en este escenario?



En este caso, se tiene un cilindro macizo de radio R_1 y densidad volúmetrica ρ y un cilindro hueco de radio R_2 cargado superficialmente con una densidad de carga $-\sigma$. Ambos son muy largos. El objeto completo tiene carga neutra.