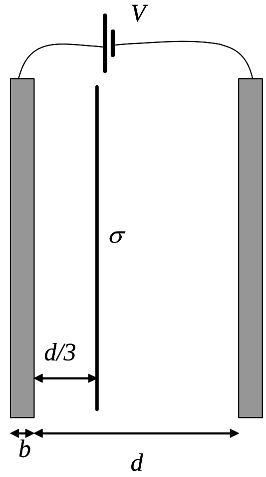
Problema de Electrostática

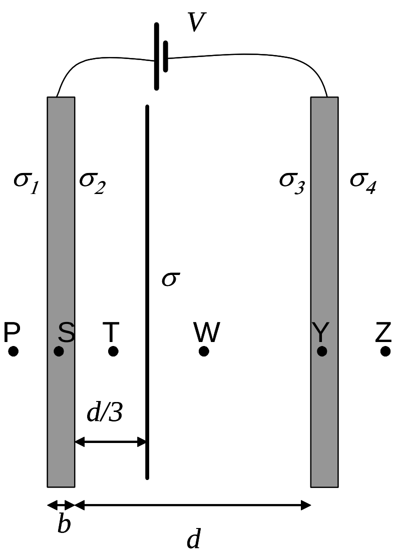
Se tienen dos chapas cuadradas, conductoras y paralelas de ancho b y área A. Ellas están separadas una distancia d (ver figura). Se las conecta por medio de una batería de diferencia de potencial V. Entre las mismas y a una distancias $d/3$ de una de ellas, se coloca una distribución plana de carga uniforme de densidad σ. Calcular la distribución de cargas sobre cada superficie despreciando efectos de borde.



Para resolver el problema debemos hacer uso de los conceptos básicos. ¿Por qué? Porque, si bien el dibujo se parece al de un capacitor, no podemos asegurar de entrada que tenga las propiedades de un capacitor. Por ejemplo, no podemos asegurar a priori que el campo eléctrico sea nulo fuera de la zona entre placas. Sí debemos estar seguros de que la carga total se conserva. Como la distribución plana es originalmente uniforme y no son cargas sobre un conductor, sin importar cómo se distribuyan las cargas sobre las caras de los otros conductores, la distribución σ seguirá imperturbable. Otra cosa de la que debemos estar seguros es que la carga total en las chapas conductoras debe ser nula. Esto se debe a que las chapas no estaban cargadas antes de colocarle la pila (el enunciado no lo dice que estuvieran previamente cargadas) y la pila solamente puede distribuir cargas (no las crea). Y, como siempre, usar la ley experimental acerca de la nulidad del campo eléctrico dentro de los conductores en situación electrostática y su consecuencia de que son equipotenciales (es decir, todos los puntos de **cada** conductor están al mismo potencial respecto de algo).

La forma de resolver este problema no es única, pero si usamos los principios fundamentales estaremos seguros de que no estamos suponiendo nada sin justificar….

Entonces, supongamos que cada superficie de los conductores está cargada con densidades desconocidas.(¿Por qué aseguro que las cargas estarán solamente en las superficies?). Consideraré todas positivas y la resolución del problema determinará si lo son.



Veamos cómo escribir matemáticamente las propiedades del sistema

1) La batería solo distribuye cargas:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

2) El campo eléctrico dentro de los conductores es nulo (la expresión del campo eléctrico para una distribución plana superficial de cargas ya la hemos hecho). Aplicando el principio de superposición

$$E_S = 0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$E_Y = 0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma + \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

Pero solamente tenemos 3 ecuaciones y cuatro incógnitas. Además, no parece lógico que la distribución no dependa del valor de *V*. Usemos entonces la circulación del campo eléctrico

3) $\int_0^d dV = -V = -\int_0^d \vec{E}\bullet\overrightarrow{dl}$. Observen que el " 0" lo ubiqué en la superficie del conductor cargado con σ_2. Entonces

$$V = \int_0^d \vec{E}\bullet\overrightarrow{dl} = \int_0^{d/3} \vec{E}\bullet\overrightarrow{dl} + \int_{d/3}^{d} \vec{E}\bullet\overrightarrow{dl}$$

Necesitamos, entonces, las expresiones de los campos en puntos como el punto T y W, ya que el campo resulta uniforme en las regiones donde están estos puntos.

$$E_T = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} \qquad E_W = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$$V = \int_0^d \vec{E}\bullet\overrightarrow{dl} = \int_0^{d/3} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} dl + \int_{d/3}^{d} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} dl =$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0}\frac{d}{3} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0}\frac{2d}{3} =$$

$$= \frac{d}{6\varepsilon_0}\left(3\sigma_1 + 3\sigma_2 + \sigma - 3\sigma_3 - 3\sigma_4\right) = V$$

Entonces

$$\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{\sigma}{3} - \sigma_3 - \sigma_4\right) = V\frac{2\varepsilon_0}{d}$$

Tenemos entonces:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \tag{2}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \tag{3}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{\sigma}{3} - \sigma_3 - \sigma_4 = V\frac{2\varepsilon_0}{d} \tag{4}$$

De (2)+(3)

$$\sigma_1 = \sigma_4 \tag{5}$$

De (3)-(2)

$$\sigma_2 + \sigma + \sigma_3 = 0 \tag{6}$$

De (4) y (5)

$$\sigma_2 + \frac{\sigma}{3} - \sigma_3 = V\frac{2\varepsilon_0}{d} \qquad (7)$$

Resumiendo, quedan

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1 = 2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \qquad (8)$$

$$\sigma_2 + \sigma + \sigma_3 = 0 \qquad (9)$$

$$\sigma_2 + \frac{\sigma}{3} - \sigma_3 = V\frac{2\varepsilon_0}{d} \qquad (10)$$

De (9)-(8)

$2\sigma_1 = \sigma$. Entonces, usando (5) se tiene que $\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma/2$

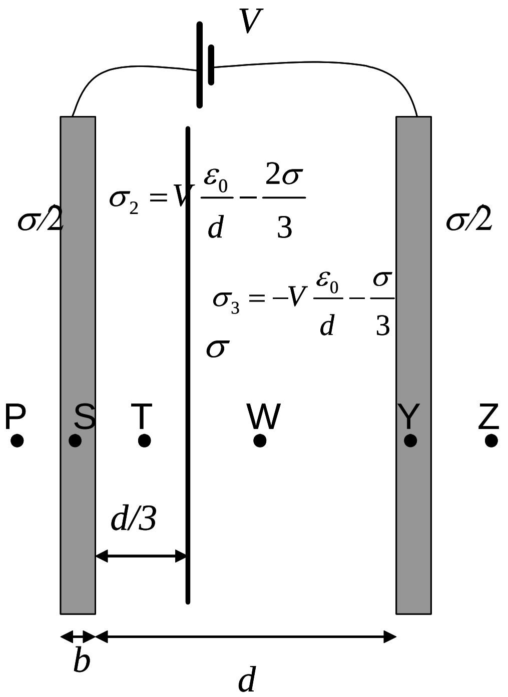
Y de (10)-(9)

$\frac{\sigma}{3} - \sigma - 2\sigma_3 = V\frac{2\varepsilon_0}{d}$. Entonces $-\frac{\sigma}{3} - \sigma_3 = V\frac{\varepsilon_0}{d}$; es decir $\sigma_3 = -V\frac{\varepsilon_0}{d} - \frac{\sigma}{3}$

Y reemplazando en (9)

$\sigma_2 + \sigma - V\frac{\varepsilon_0}{d} - \frac{\sigma}{3} = 0$. Entonces $\sigma_2 = V\frac{\varepsilon_0}{d} - \frac{2\sigma}{3}$

La configuración será la de la figura.



El problema terminaría acá en un examen, pero podemos usarlo para analizar algunas cosas más y reforzar los conocimientos.

1) ¿Cuánto vale el campo en el punto P? Aplicando el Principio de Superposición, tendremos

$$E_P = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{-\frac{\sigma}{2} - \left(V\frac{\varepsilon_0}{d} - \frac{2\sigma}{3}\right) - \sigma - \left(-V\frac{\varepsilon_0}{d} - \frac{\sigma}{3}\right) - \frac{\sigma}{2}}{2\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{-\frac{\sigma}{2} - V\frac{\varepsilon_0}{d} + \frac{2\sigma}{3} - \sigma + V\frac{\varepsilon_0}{d} + \frac{\sigma}{3} - \frac{\sigma}{2}}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Y en un punto como el punto Z

$$E_Z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma + \sigma_3 + \sigma_4}{2\varepsilon_0} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Observen que hemos tomado la dirección positiva hacia la derecha (al hacer la circulación). En consecuencia, el campo en Z tendrá sentido "hacia la derecha" y en P hacia la izquierda (SI y SOLO SI $\sigma > 0$).

2) ¿Cuánto vale el campo en T?

Como $E_T = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma - \sigma_3 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} = \dfrac{V\dfrac{\varepsilon_0}{d} - \dfrac{2\sigma}{3} - \sigma + V\dfrac{\varepsilon_0}{d} + \dfrac{\sigma}{3}}{2\varepsilon_0} = \dfrac{2V\dfrac{\varepsilon_0}{d} - \dfrac{4\sigma}{3}}{2\varepsilon_0} = \dfrac{V\dfrac{\varepsilon_0}{d} - \dfrac{2\sigma}{3}}{\varepsilon_0}$

$$E_W = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma - \sigma_3 - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{V\dfrac{\varepsilon_0}{d} - \dfrac{2\sigma}{3} + \sigma + V\dfrac{\varepsilon_0}{d} + \dfrac{\sigma}{3}}{2\varepsilon_0} = \frac{2V\dfrac{\varepsilon_0}{d} + \dfrac{2\sigma}{3}}{2\varepsilon_0} = \frac{V\dfrac{\varepsilon_0}{d} + \dfrac{\sigma}{3}}{\varepsilon_0}$$

$$E_T = \frac{V}{d} - \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad\qquad E_W = \frac{V}{d} + \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}$$

3) Por cuestión de verificación, hagamos la circulación del campo eléctrico entre 0 y d con estas expresiones del campo. ¿Es coherente el resultado con lo obtenido anteriormente? Si no lo fuera, estaríamos en serios problemas!!!!

Resumiendo

$$E_P = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E_S = 0 \qquad E_T = \frac{V}{d} - \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad E_W = \frac{V}{d} + \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad E_Y = 0 \qquad E_Z = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

4) Como podemos ver, aún cuando σ sea positiva, dependiendo del valor de σ y de $\dfrac{V}{d}$, el campo puede tener sentido diferente a cada lado de la distribución plana. Como ya estudiaron condiciones de contorno, verifiquen que se cumplen las correspondientes al campo eléctrico.

5) ¿Qué cambia si en lugar de una pila hay solo un cable conductor uniendo a las chapas? En ese caso

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma / 2 \qquad \sigma_2 = -\frac{2\sigma}{3} \qquad \sigma_3 = -\frac{\sigma}{3}$$

Observen que considerando a cada chapa conductora como un todo, una tendrá una carga $\sigma/6$ y la otra $-\sigma/6$

En este caso las densidades de carga no dependen de la separación d aunque dependen de la proporción entre la separación entre placas metálicas y la separación de la distribución plana con las chapas.

En cuanto a los valores de los campos

$$E_P = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E_S = 0 \qquad E_T = -\frac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad E_W = +\frac{\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad E_Y = 0 \qquad E_Z = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$