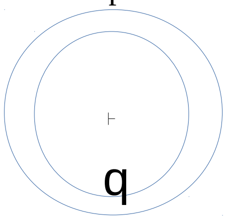
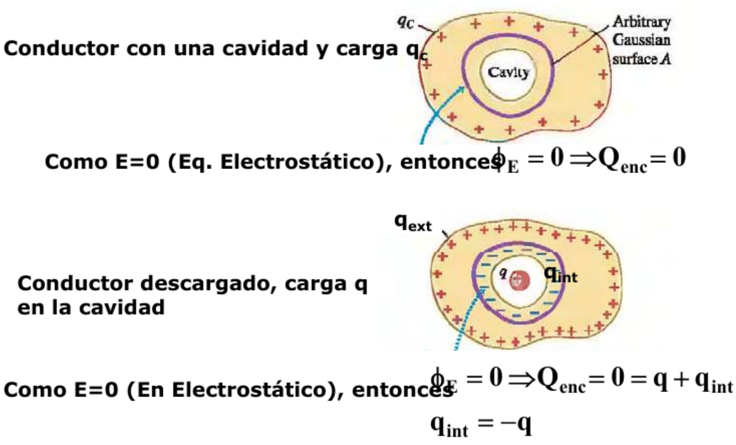
Problema 2 (Conductores)

Una cáscara conductora esférica, de radio interior a = 4 cm y exterior b = 6 cm, tiene en su centro una carga puntual q = +1 μC. Calcular el campo eléctrico y el trabajo que es necesario aplicar para llevar una carga de prueba q0 entre dos puntos arbitrarios del espacio. Calcular la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio. Graficar en función de una coordenada adecuada el campo, el trabajo y la diferencia de potencial. Discuta la continuidad o discontinuidad de las funciones calculadas. Considere las siguientes configuraciones:
a) La cáscara está descargada.
b) La cáscara está cargada con q c = - 3 μC.
¿Cómo se distribuye la carga en cada caso? Explique los motivos que le permiten usar la Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico



Solución:

Antes de presentar la solución recordemos que se vió un ejemplo parecido en la teórica:



Ahora simplemente lo que vamos a hacer es completar los detalles matemáticos y calcular las demás cosas que nos piden.

Recapitulemos: En electrostática el campo dentro el conductor es cero (sino no hay equilibrio electrostático). Todas la cargas de igual signo se repelen entre si y van parar a la superficie del conductor. Llamaremos Qsa a la carga sobre la superficide de radio ‘a’, y Qsb a la carga sobre la superficie de radio ‘b’.

Como hay simetría esférica, el campo solo depende de la distancia radial y apunta en la dirección radial entonces es fácil calcular usando Gauss. (recordemos que el area de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, entonces)

$$\oint \mathbf{E}.\mathbf{ds} = \frac{Q_e}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

la carga en encerrada será distinta según la superficie de Gauss que tomemos. Es decir

$$Q_e = \begin{cases} q \qquad (r < a) \\ q + Qsa \qquad (a < r < b) \\ q + Qsa + Qsb \qquad (r > 0) \end{cases}$$

automáticamente podemos deducir el campo , (recordando que siempre el campo en el conductor es cero)

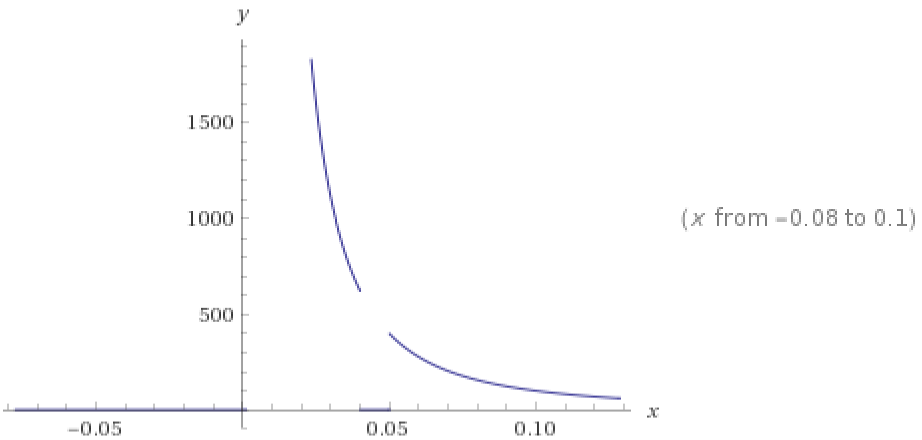
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r < a) \\ 0 \qquad (a < r < b) \\ \frac{q+Qsa+Qsb}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > b) \end{cases}$$

y usando la expresión del campo nos queda que

$$q + Qsa = 0 \Rightarrow Qsa = -q$$

entonces automáticamente podemos sacar el campo

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r < a) \\ 0 \qquad (a < r < b) \\ \frac{Qsb}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > b) \end{cases}$$



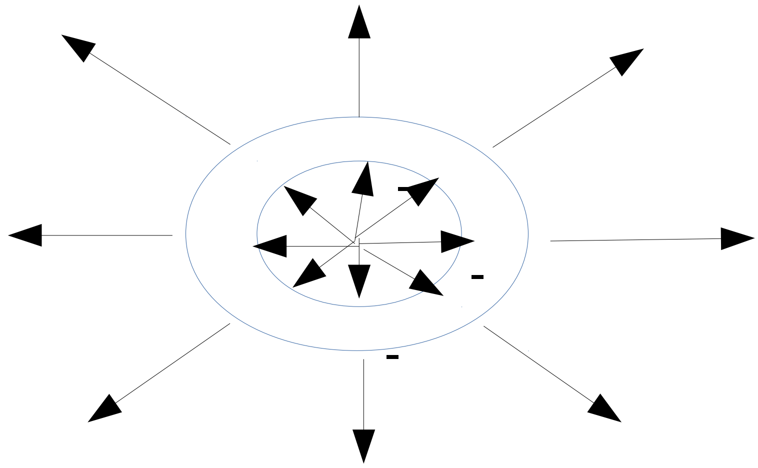
(se tomó a=4 cm y b= 5 cm para graficar mejor, caso del item a donde qsb=q)

Qsb no es dato. Pero en el item a) nos dicen que el conductor está descargado (osea que es neutro)

$$Qsa + Qsb = 0$$

entonces tenemos que

Qsa=-q y Qsb=q.



Analicemos físicamente que es lo que ocurrre : La carga puntual q genera campo, al entrar en el conductor ese campo atrae las cargas negativas hacia la superficie A y repele las positivas hacia la superficie B, de modo de aular el campo en el campo en el conductor . Observemos que el el campo que queda es el que genera la carga q, adentro de todo (r<a) y afuera de todo (r>b).

Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, hay que hacer

$$V(rf) - V(ri) = -\int_{ri}^{rf} \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}dr = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{rf} - \frac{1}{ri})$$

por ejemplo si los dos puntos estan en la región r<a, tenemos

$$V(rf) - V(ri) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{rf} - \frac{1}{ri})$$

Lo mismo pasa si estoy en la región r>b (afuera de todo) . De la expresión vemos que no hay problema en tomar el potencial cero en el infinito.

Si un punto esta en r<a y el otro en el conductor (osea entre a y b)

$$V(rf) - V(ri) = -\int_{ri}^{a} 0 - \int_{a}^{rf} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}dr = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{rf} - \frac{1}{a})$$

etc...

Se deja como tarea al alumno hacer todas las restantes integrales posibles del mismo tipo. (Qe dependerá de que región estoy considerando)

Nos piden graficar el trabajo y la diferencia de potencial. Para eso recordemos que

$$W = \int_{ri}^{rf} \mathbf{F}_m.\mathbf{dl} = -\int_{ri}^{rf} q\mathbf{E}.\mathbf{dl} = q(V(rf) - V(ri)) = q\Delta V$$

de modo que en realidad no tengo que calcular dos cosas distintas.

Un método es calcular el potencial y graficarlo. El otro es calcular las diferencias de potencial considerando el punto final como una variable r y el inicial como un punto de referencia y hacer las (mismas) integrales del tipo :

en r>b

$$V(r)-V(ri)=-\int_{ri}^{r}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}dr=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{ri})$$

en a <r<b

$$V(r)-V(b)=0$$

y una para r<a, una expresion como la correspondiente a r>b, solo que el ir lo tomamos como a.

$$V(r)-V(a)=-\int_{a}^{r}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}.\hat{r}dr=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a})$$

pero observemos que para graficar en funcion de r hay que decir quien es ri y cuanto vale V(ri). Pero eso es definir el cero de potencial !!. Osea que es equivalente a calcular el potencial.

Además si calculo el potencial primero, las diferencial de potencial son triviales (sólo hay que restar).

El otro método: Calculo el potencial

$$V(r)=-\int \mathbf{E}.\mathbf{dl}+C$$

simplemente reemplazando y haciendo la misma cuenta de siempre...

$$V(r)=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}+C_1\\ C_2\\ \frac{Qsb}{4\pi\epsilon_0 r}+C_3\end{cases}$$

pedimos $V(\infty)=0\Rightarrow c_3=0$

Además sabemos de la teoría que el Campo es el gradiente del potencial (el potencial es derivable) entonces el potencial es contínuo.
Planteo la continuidad en r=b y en r=a

$$\mathrm{C}_2=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}+C1$$
$$C_2=\frac{Qsb}{4\pi\epsilon_0 b}$$

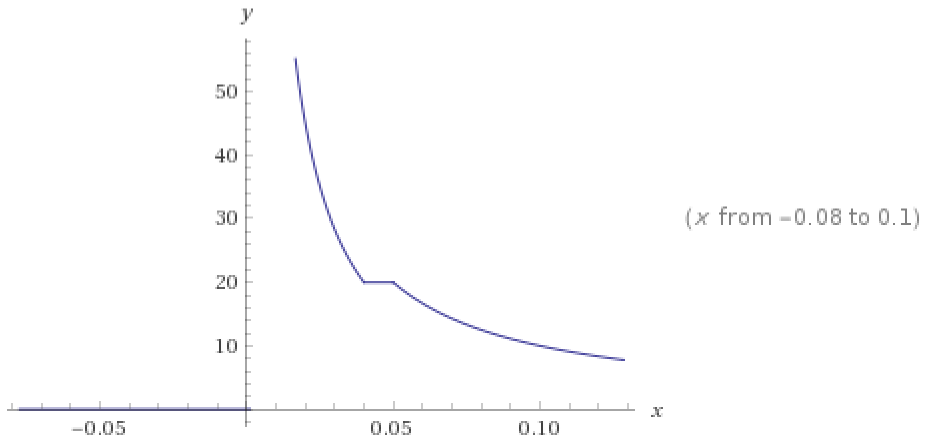
se despeja C1 y C2.

Sale: (para el caso del item a) ‘conductor descargado)

$$V(r)=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{b})\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\end{cases}$$

cualquier diferencia de potencial se calcula restando.

Gráfico:



(Nota: la escala del eje V esta cambiada, para que se vea mejor , en realidad se grafica V(r)/V0 con V0=kq/1cm)

b) Si el conductor tiene una carga dato qc, el problema se resuelve de forma casi idéntica, sólo que ahora

$Qsa + Qsb = qc$

con lo cual

$Qsb = qc + q$

la resolución ahora es la misma con esta nueva Qsb. Los resultados se dejan como ejercicio para practicar.