Problema 18

Dos cargas puntuales q 1 y q 2 están separadas una distancia d.
a) Hallar el trabajo que es necesario realizar para traer en forma cuasiestacionaria otra carga q desde un punto muy alejado hasta el punto central del segmento que separa a q 1 y q 2 .
b) Analice el resultado si las cargas son de igual valor absoluto y de signo diferente. Discuta la relación de los resultados con la dirección del campo eléctrico (Ayuda: considere la mediatriz del segmento que une ambas cargas y la irrotacionalidad del campo electrostático).
c) Idem b) si las cargas son iguales

Solución:

calculamos el trabajo que realiza la fuerza mecánica, para el movimiento cuasiestático.

$$W_m = \int_{\infty}^{rf} \mathbf{F}_m.\mathbf{dl} = -\int^{rf} q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2).\mathbf{dl}$$
$$W_m = -q\int_{\infty}^{rf} \mathbf{E}_1.\mathbf{dl} - q\int_{\infty}^{rf} \mathbf{E}_2.\mathbf{dl}$$
$$W_m = q(V_1(rf) + V_2(rf))$$

Los campos eléctricos son los de las cargas puntuales , luego los potenciales también son los de las cargas puntuales.

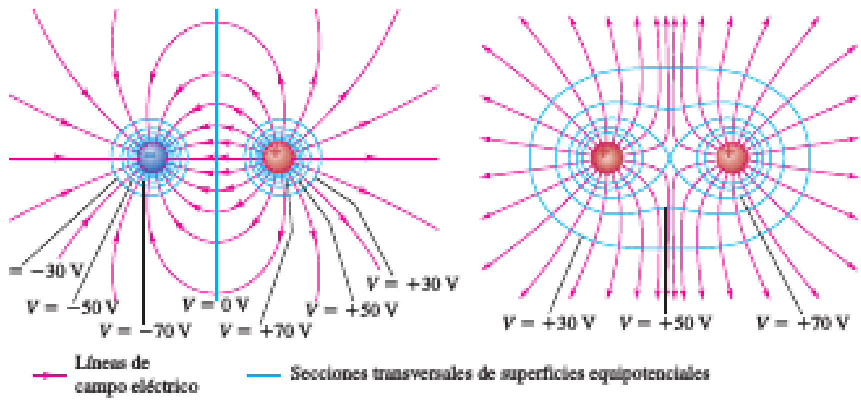
$$\mathbf{E}_1 = \frac{kq_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} \quad \Rightarrow V_1(r) = \frac{kq_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$$
$$\mathbf{E}_2 = \frac{kq_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} \quad \Rightarrow V_2(r) = \frac{kq_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}$$

donde

$$\mathbf{r}_1 = \left(\tfrac{d}{2},0,0\right) = \tfrac{d}{2}\hat{x} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \left(-\tfrac{d}{2},0,0\right) = -\tfrac{d}{2}\hat{x}$$

Entonces:

$$W_m = kq\left[\frac{q_1}{\sqrt{(x-d/2)^2+y^2+z^2}}+\frac{q_2}{\sqrt{(x+d/2)^2+y^2+z^2}}\right]=qV_T(r)$$



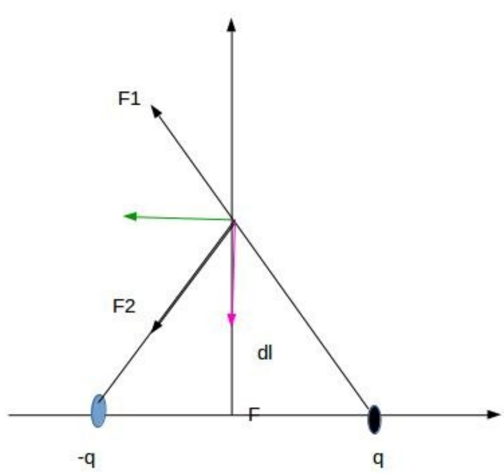
a) si r=rf=(0,0,0)

$$W = 2k\left[\frac{qq_1}{d}+\frac{qq_2}{d}\right]$$

b) si las cargas son del mismo modulo y signo opuesto $q_1 = q = -q_2$ y rf=(0,0,0)

$$W = 0$$

más aún: todo el plano x=0 tiene W=0
Para verlo intuitivamente , observemos que como las cargas fuentes son de igual modulo y signo contrario y si la carga q está ubicada sobre el eje de simtría (eje ‘y’).



la fuerza resultante apunta en el eje x, Si traemos la carga q por un camino que venga desde el infinito moviéndose por el eje ‘y’, la fuerza resultante (que por simetría va en el eje ‘x’) es perpendicular al desplazamiento con lo cual:

$$W_m = -\int_{\infty}^{0} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2).dy\hat{y}$$

$$W_m = -\int_{\infty}^{0} F_T\hat{x}.dy\hat{y} = 0$$

como el campo eléctrico es conservativo, el trabajo no depende del camino entonces es cero por cualquier camino.