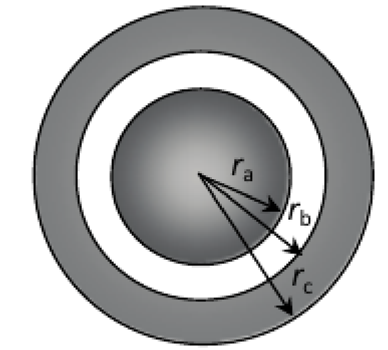
Problema 7

Se tiene un conductor cilíndrico de largo L y radio ra , rodeado por otro cascarón cilíndrico de radio interno rb y externo rc (ambos descargados inicialmente). El espacio entre ellos está lleno de un dieléctrico de permitividad ϵ_r
Despreciando efectos de borde, y sabiendo que se ha conectado una batería tal que V(r b)- V(r a) =10 V,
a) Discuta por qué no es necesario especificar los puntos donde se conecta la batería sobre cada conductor.
b) Calcule las distribuciones de cargas en todas las superficies,
c) Calcule E en todo el espacio.
d) Calcule V(r)- V(r a)



Solución

Concepto : Como tenemos un Dieléctrico, debemos usar Gauss para el campo D. Esto es así porque no conocemos las cargas totales, (dado que aparecerán cargas de polarización).

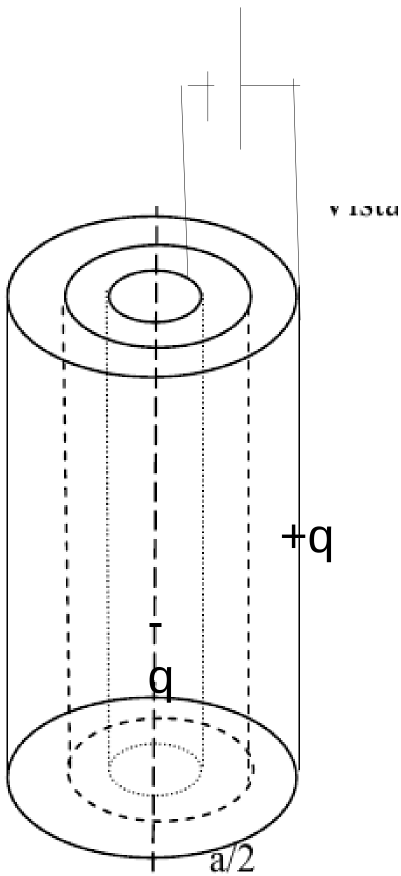
$$\oint \mathbf{D}.\mathbf{ds} = Q_{le}$$

donde Qle es la carga libre encerrada. Hay simetria cilindrica , entonces D solo depende de la distancia radial y apunta en la dirección radial . Al conectar la batería esta lleva carga (libre) Q a la superficie de mayor potencial y – Q a la otra
Recordando que la superficie lateral de un cilindro de radio r y longitud l , es $2\pi rl$ tenemos

$$D2\pi rl = Q'_{le}$$

llamo $$\lambda = \frac{Q'_{le}}{l} = \frac{Q_{le}}{L}$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q_{le}}{2\pi Lr}\hat{r}$$



recordemos que :

$$D = \epsilon_0 \mathbf{E} + P$$

y como los materiales son (en este caso) todos lineales

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

donde $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ Luego,

$$\mathbf{E} = \frac{Q_{le}}{2\pi\epsilon Lr}\hat{r}$$

Entonces

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (r < r_a) \\ \frac{-Q}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r r} & (a < r < b) \\ 0 & (a < r < b) \end{cases}$$

A partir de ellos la diferencia de potencial entre un punto de referencia (el punto A) y un punto cualquiera r es :

$$V(r) - V(ra) = -\int_{ra}^{r} \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\int_{ra}^{r} \frac{-Q}{2\pi\epsilon L r}\hat{r}.\hat{r}dr = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon} ln(\frac{r}{ra})$$

(por supuesto que en las regiones r<ra y r > rb no hay carga encerrada y no hay campo ni diferencia de potencial)

entonces,

$$10volts = V(rb) - V(ra) = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} ln(\frac{rb}{ra})$$

(obs: Si hubiéramos empezado sin darnos cuenta donde estaba la carag positiva y donde la negativa, la ecuación anterior nos dice automaticamente el sigo de la carga)

Despejando de ahí obtenemos que la carga por unidad de longitud vale:

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi\epsilon 10volts}{ln(\frac{rb}{ra})}$$

si me dieran datos numéricos de ra , rb y la permitividad relativa , saco Q.

Teniendo D y E , podemos calcular la polarización en el dieléctrico:

$$P = (\epsilon_0\epsilon_r - \epsilon_0)E = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} D$$

entonces

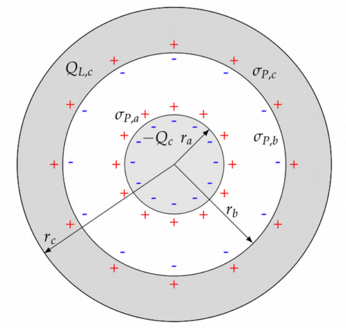
$$\mathbf{P} = \begin{cases} 0 & (r < r_a) \\ (1 - \frac{1}{\epsilon_r})\frac{-Q/L}{2\pi r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

Para calcular las cargas de polarización, observemos que (ver teórica de Elsa o del apunte)

$$\sigma_p = \mathbf{p}.\hat{n}$$

donde n es la normal a la superficie que encierra al dielécrico, entonces

$$\sigma_{pa} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r})\frac{-Q/L}{2\pi a}\hat{r}.(-\hat{r})$$
$$\sigma_{pb} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r})\frac{-Q/L}{2\pi b}\hat{r}.\hat{r}$$



con lo cual (como la carga es la integral de superficie de la densidad superficial)

$$Q_{pa} = \int \sigma_p ds = \sigma 2\pi a L$$
$$Q_{pb} = \int \sigma_p ds = \sigma 2\pi b L$$
$$Q_{pa} = (1 - \frac{1}{\epsilon_r})Q$$
$$Q_{pb} = -(1 - \frac{1}{\epsilon_r})Q$$

(recordemos que el potencial crece ‘al revés que el campo , como se ve en la figura)

La carga de polarización total es cero (como debe ser pues en el dieléctrico hay dipolos)