Consideraciones generales:

Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_e}{\epsilon_0}$$

$$Q_e = \int_{Vol(S)} \rho dv$$

donde Qe es la carga encerrada ADENTRO de la Sup de Gauss.

La ley vale para cualquier superficie cerrada.

Usos de la Ley de Gauss:

Calculo de Campo Eléctrico en situaciones de alta simetria (Hilos y cilindros infinitos ,Planos infinito, Esferas)

en estas situaciones uno debe deducir (por simetria) la dirección y la dependencia del campo E, a partir de eso se elige la sup de Gauss
de modo tal que
1) la nornal a la superficie coincida con la direccion del campo
2) y de modo que el campo sea constante en la superficie : de ese modo se cumple que

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \oint Eds = E \oint ds$$

En ese caso donde la ultima integral da el área d la superficie de Gauss que es atravesada por lineas de campo.

Entonces cuando se cumplen las dos condiciones :

$$E = \frac{Q_e}{\epsilon_0 \iint ds}$$

Ejemplos de aplicación de la ley de Gauss (en sistemas con alta simetría)

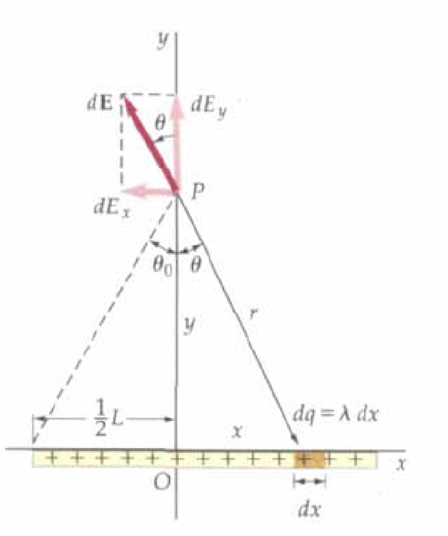
Problema 13.

Calcular el campo usando Gauss de las siguientes configuraciones

1 campo del Hilo infinito:

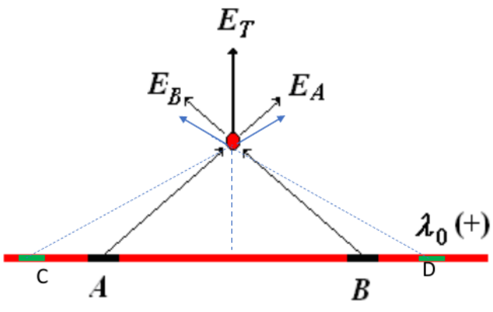
Consideraciones de simetría

1) el hilo tiene simetría de traslación en x, y de rotación en el ángulo ϕ.
2) Gráficamente se ve que el campo es radial porque al ser infinito cada diferencial de carga aporta un campo que , sumado al diferencial simétricamente ubicado , da una resultante sólo en la dirección perpendicular al hilo. (equivalentemente todos los planos que contiene al hilo son de simetria de reflexión por lo que cualquier componente perpendicular al plano se cancela, y entonces asi se ve que el campo es radial)

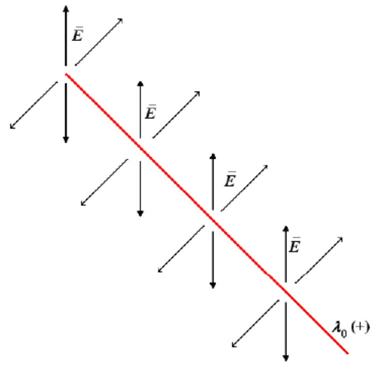


3) Entonce tenemos

$$\vec{E}(r,\phi,z) = E(r)\hat{r}$$



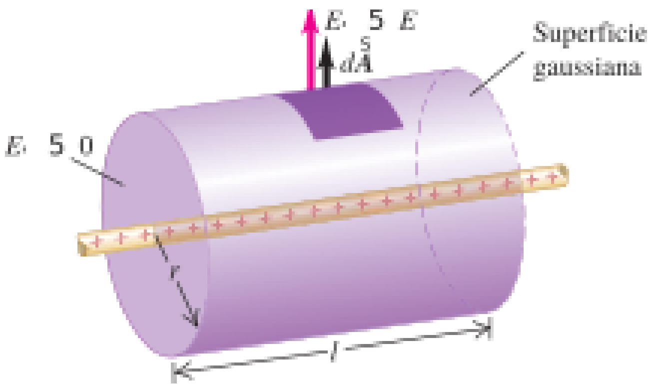
Vista lateral



Vista en perspectiva

4) Elegimos una superficie de Gauss con normal paralela a la dirección radial , y tal que el campo sea constante en la supoerficie. Es decir elegimos un cilindro de Gauss.

Entonces:



$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_e}{\epsilon_0}$$
$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \int_{tapas} E.\vec{ds} + \int_{suplateral} E.\vec{ds}$$
$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \int_{tapa1} E\hat{r}.ds\hat{z} + \int_{tapa2} E\hat{r}.ds(-\hat{z}) + \int_{suplateral} E\hat{r}.ds\hat{r} = 0 + E2\pi rL$$

$$\frac{Q_e}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Entonces:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

2) Campo de un cilindro infinito cargado en superficie con densidad de carga σ

Tiene las mismas simetrías que el caso anterior , por lo tanto el campo es $\vec{E}(r,\phi,z) = E(r)\hat{r}$

Tomamos un superficie de Gauss cilindrica. La integral de flujo da igual pero la carga encerrada depende de si la sup de Gauss está adentro o afuera del cilindro cargado.

Entonces tenemos:

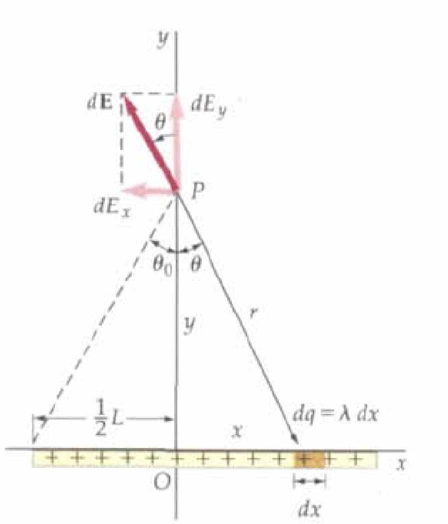
$$Q_e = \begin{cases} 0 \quad (r < R) \\ \sigma 2\pi RL \quad (r > R) \end{cases}$$

con lo cual usando Gauss:

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}\hat{r}$$

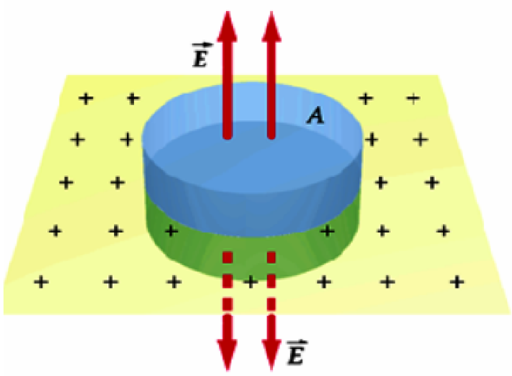
3) Plano infinito con densidad superficial σ

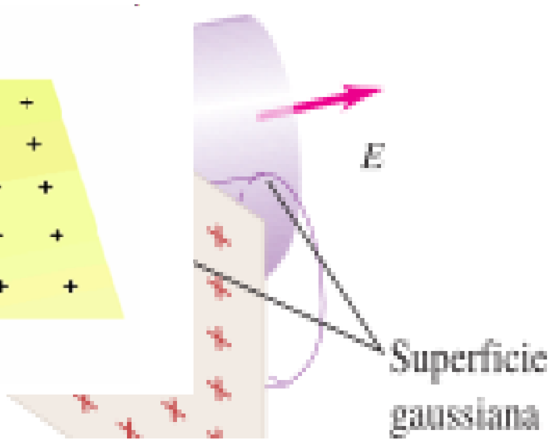
Consideraciones de Simetría:
1)El plano infinito tiene simetría de traslación en x y en y. (siendo z la dirección perpendicular al plano)
2) Gráficamente se ve que cada diferencial de carga , tiene uno simétricamente ubicado de modo que el campo que genera cada par da una resultante que apunta el la dirección z



3) entonces:

$$\vec{E}(x,y.z) = E(z)\hat{z}$$





Usando Gauss

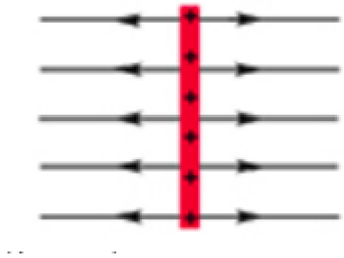
$$\oint E.\vec{ds} = \frac{Q_e}{\epsilon_0}$$

$$\oint E.\vec{ds} = \int_{tapas} \vec{E}.\vec{ds} + \int_{suplateral} \vec{E}.\vec{ds} = 2E\sigma A + 0$$

$$\frac{Q_e}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

entonces

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} \quad (z>0) \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} \quad (z<0) \\ \end{cases}$$



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sg(z)\hat{z}$$

4) Esfera de radio R, cargada uniformemente en volumen con densidad ρ

Consideraciones de simetría

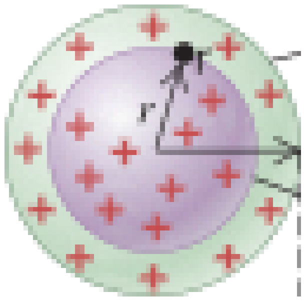
1) la Esfera tiene simetria de rotación en el ángulo θ y en el ángulo ϕ. por lo cual el campo no depende de esas variables.
2) Cualquier plano que pasa por el origen es un plano de simetría de reflexión, por lo cual el campo esta contenido en ese plano, Como el plano es cualquiera que pase por el origen, el rampo es radial, (también puede verse gráficamente)

Entonces

$$\vec{E}(r.\theta,\phi) = E(r)\hat{r}$$

3) Luego tomamos como superficie de Gauss una esfera (la normal de la esfera coincide con la dirección radial, y el campo es constante en la esfera de Gauss)

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = E4\pi r^2$$



la carga encerrada depende de si estoy dentro o afuera de la esfera cargada

$$Q_e = \begin{cases} \frac{4\pi r^3}{3}\rho & (r < R) \\ \frac{4\pi R^3}{3}\rho & (r > R) \end{cases}$$

Luego

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & (R < r) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & (R > r) \end{cases}$$