Esfera Cargada no Uniformemente:

Una esfera de radio R, se encuentra cargada con una densidad de carga no uniforme $\rho = Ar$, donde A es una constante con unidades de $C/m4$.

Hallar el Campo Eléctrico en todo punto del espacio.

Solución:

Consideraciones de simetria: usamos variables (r, ϕ, θ) por simetria de rotacion el campo Eléctrico no puede depender de $\theta \quad \phi$, osea: $E(r, \phi, \theta) = E(r)$

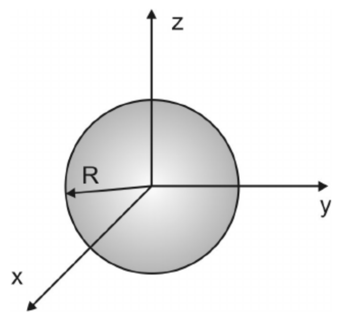


Figura 1: *Esfera cargada con densidad de carga volumétrica no uniforme*

Por construcción Geométrica $\vec{E} = E\hat{r}$

Tomo como sup de Gauss una esfera.

Hay dos dos regiones del espacio bién definidas: dentro de la esfera : $r < R$ y fuera de la esfera $r > R$.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

La parte del flujo es (en cualquier región):

$$\oint_{esfera} E(r)\hat{r}.ds\hat{r} = E \oint_{esf} ds = E4\pi r^2$$

$$E = \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (1)$$

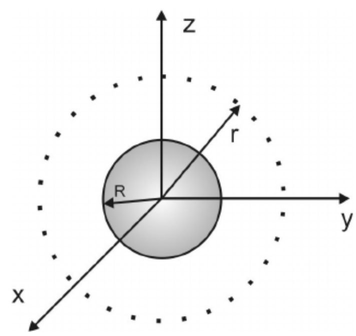


Figura 2: *Superficie de Gauss (punteada) en la región $r > R$*

Para calcular la Qe, uso las dos regiones:

si r<R (adentro)

$$Q_{enc} = \int_{V(r)} \rho(\mathbf{r})dV$$

$$Q_e = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$Q_e = 4\pi \int_0^r Arr^2 dr$$

$$Q_e = \pi A r^4$$

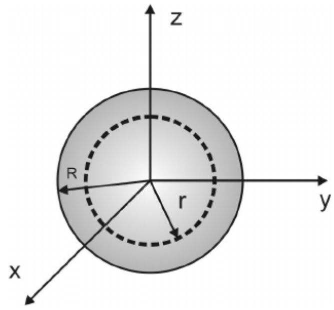


Figura 3: *Superficie de Gauss (punteada) en la región* $r < R$

En la región r>R (afuera de la esfera cargada)

$$Q_e = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$Q_e = 4\pi \int_0^R Arr^2 dr$$

$$Q_e = \pi A R^4$$

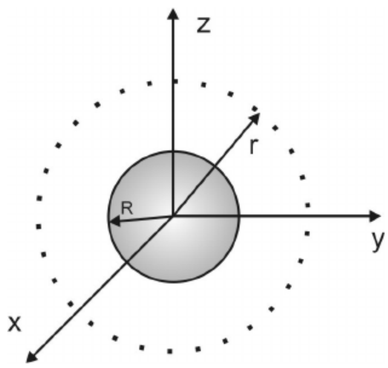


Figura 2: *Superficie de Gauss (punteada) en la región* $r > R$

Reemplazando en (1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Ar^2}{4\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & \text{si } r < R \\ \dfrac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & \text{si } r > R \end{cases}$$

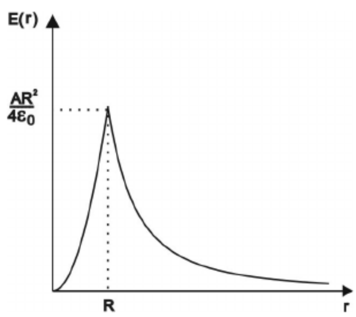


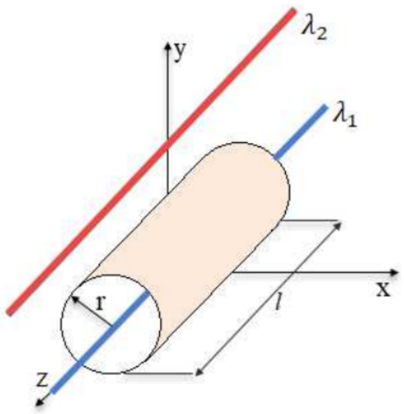
Figura 4: *Módulo del campo eléctrico en función de la coordenada radial*

Problema:

Hallar el Campo eléctrico de dos hilos infinitos de densidades λ_1 y λ_2 separados uns distancia d.

Solución:

Cada hilo tiene simetria cilindríca: Uso Gauss, pero entonces las superficies de gauss están centradas en cada hilo.

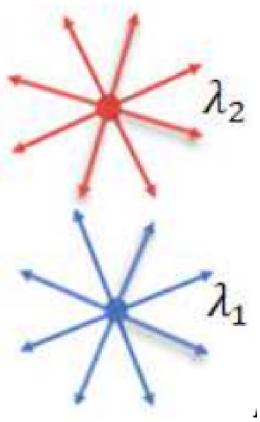


Vimos que:

$$\int_{sup-lat} E(r)\hat{r}.ds\hat{r} = \frac{Q_e}{\epsilon_0} \Rightarrow E2\pi rL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_1}\hat{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r_2}\hat{r}_2$$



Lo escribo todo en cartesianas:

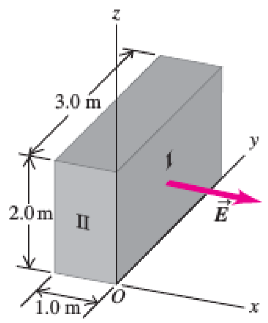
$$\frac{\hat{r}}{r} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$$

el hilo 2, esta corrido en el eje y una distancia d, es decir:
x’=x
y’=y-d

$$\vec{E}_T = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}[\frac{\lambda_1(x,y)}{x^2+y^2} + \frac{\lambda_2(x,y-d)}{x^2+(y-d)^2}]$$

Problema extra (de tarea):

Una placa de area infinita y ancho d cargada uiformente



Ayuda para resolverlo:

tomo un cilindrito de Gauss (o un paralelepipedo) con las tapas paralelas a las caras.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$\iint E\hat{z}.ds\hat{z} + \iint (-E)\hat{z}.ds(-\hat{z}) = \frac{Q_e}{\epsilon_0}$$

caso 1 si (|z|<d) (la sup de gauus esta dentro)

$$Q_e = \int_{-z}^{z} \rho dz A$$

donde A es el área de la tapa.

Si |z|>d/2.

$$Q_e = \int_{-d/2}^{d/2} \rho dz A$$

tarea ; terminar el ejercicio