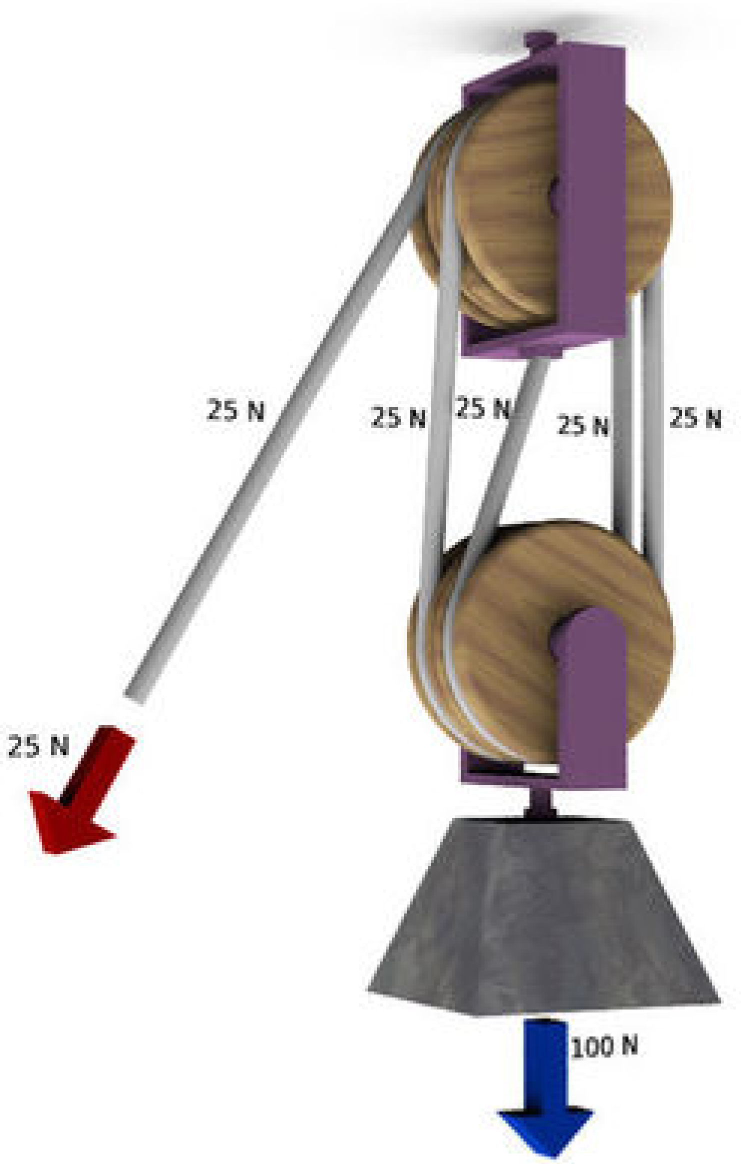
(93.41) Física I – ITBA



Temas

Cinemática

- Sistema de coordenadas
- Partícula
- Vector posición
- Vector desplazamiento
- Trayectoria
- Cinemática unidimensional
  - Velocidad vectorial media
  - Velocidad instantánea
  - Aceleración media
  - Aceleración instantánea
- Integración de las ecuaciones del movimiento
  - Ecuaciones MRUV
- Cinemática bi y tridimensional
  - Velocidad vectorial media
  - Velocidad instantánea
  - Aceleración media e instantánea
- Componentes tangencial y normal de la aceleración
- Movimiento relativo

Dinámica

- 1° ley de Newton: Principio de inercia
- 2° ley de Newton: Principio de masa
- 3° ley de Newton: Principio de acción y reacción
- Vínculos o ligaduras
- Rozamiento
- Curvas peraltadas
- Radio de curvatura en función de la velocidad y la aceleración

Trabajo y Energía

- Trabajo en movimiento curvilíneo con fuerza variable
- Trabajo de la fuerza peso
- Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte
- Potencia
- Teorema del trabajo – Energía cinética
- Fuerzas conservativas y No conservativas
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Teorema de conservación de la energía mecánica

Cantidad de Movimiento (o momento lineal)

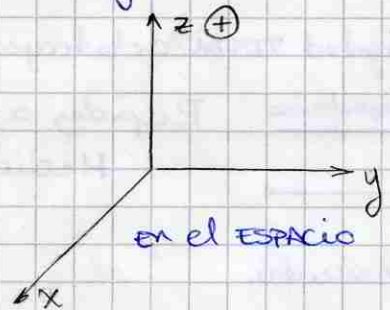
- Momento lineal de una partícula
- 2° ley de Newton para una partícula (versión real)

HOJA
FECHA

FÍSICA I

Cinemática:

• **Sistema de Coordenadas:** Conjunto de números (uno, dos o tres ejes coordenados) necesarios para definir la posición de los puntos en el espacio. Se toma un centro de coordenadas y se elige los sentidos + y − de cada eje.

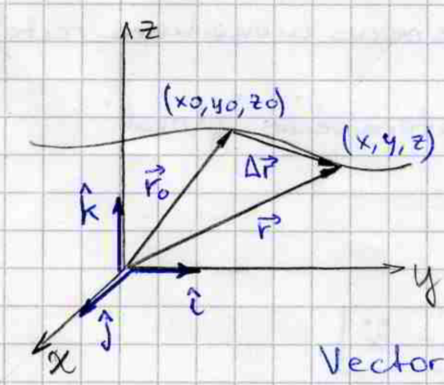


(derecha)
Desplazo la mano del eje "x" al eje "y" (positivos) y encuentro en la dirección del pulgar el semieje "z" positivo

• **Partícula:** Cuerpo con dimensiones muy pequeñas respecto a la trayectoria que describe, considerado como "un punto" con MASA.

• **Vector posición ($\vec{r}$):** Define la posición de la partícula respecto del origen del sistema de coordenadas elegido.

• **Vector desplazamiento ($\Delta\vec{r}$):** Se ubica desde el origen del movimiento hasta el punto en donde finaliza el mismo. NO depende del origen de coordenadas.



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: versores en las direcciones x, y, z.

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}$$ Vector Posición

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$

Vector Desplazamiento $$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}}$$

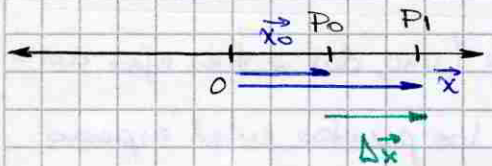
Si la partícula regresa al punto de partida, $\Delta\vec{r} = 0$.

• **trayectoria:** Lugar geométrico formado por los sucesivos puntos que ocupa la partícula a lo largo del movimiento.

NOTA

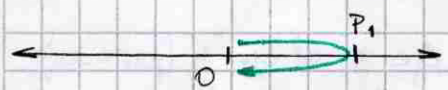
Cinemática Unidimensional:

• Velocidad Vectorial Media:



$$\boxed{\vec{V_m} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}} \qquad \Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x_0}$$

Si el cuerpo regresa al punto de partida, $\Delta\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{V_m} = 0$ sin importar cuán rápido se haya movido. $\vec{V_m}$ es una velocidad constante.



Si trabajo con la longitud TOTAL de la trayectoria:

$$V_m = \frac{\text{Longitud de la trayectoria}}{\Delta t}$$ Rapidez o Celeridad Media

$\vec{V_m}$ sólo brinda información global del movimiento.

• Velocidad Instantánea:

Es la velocidad en un punto o instante del movimiento, calculada aplicando el cálculo diferencial:

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}}$$

Si $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta\vec{x} \to 0$

$$\boxed{V = \dot{x}}$$

• Aceleración Media:

La partícula está acelerada cuando varía su velocidad instantánea con el tiempo. Trabajando con escalares (me muevo en una línea recta):

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V - V_0}{t - t_0}}$$

Sólo brinda información "global".

• Aceleración Instantánea:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}} \qquad \boxed{a = \ddot{x}}$$

Una aceleración negativa no siempre implica un movimiento desacelerado (o sea, disminuye $|\vec{V}|$) sino que puede ser acelerado en el otro sentido.

HOJA

FECHA

Integración de las ecuaciones del movimiento:

Condiciones iniciales $\begin{cases} t = t_0 \\ V(t_0) = V_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

• Ecuaciones MRUV ($a = cte$):

1) $a = \dfrac{dV}{dt}$

$dV = a\,dt$

$\int_{V_0}^{V} dV' = \int_{t_0}^{t} a\,dt'$

$V - V_0 = a(t - t_0)$ Si $t_0 = 0s$:

$$\boxed{V(t) = V_0 + at}$$

2) $V(t) = V_0 + a.t$

$\dfrac{dx}{dt} = V_0 + a.t$

$dx = V_0\,dt + a\,t\,dt$

$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0}^{t} V_0 t' + a\int_{t_0}^{t} t'dt'$

$x - x_0 = V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

Si $t_0 = 0s$:

$$\boxed{x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

3) $a = \dfrac{dV}{dt}$

$a = \dfrac{dV}{dt} \cdot \dfrac{dx}{dx} = \dfrac{dV}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ V

$a\,dx = V\,dV$

$\int_{x_0}^{x} a\,dx' = \int_{V_0}^{V} V'dV'$

$\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = a(x - x_0)$

$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$

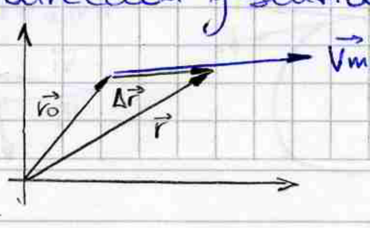
$$\boxed{V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Cinemática Bi y Tridimensional:

• Velocidad Vectorial Media:

Tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento Δr

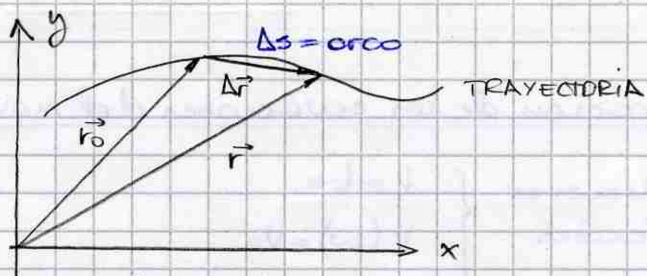
$$\boxed{\vec{V_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$



NOTA

• **Velocidad Instantánea:**

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$



Cuando $\Delta t \to 0$, $\|d\vec{r}\| = ds$

o sea, $d\vec{r}$ se transforma en un vector tangente a la curva.

$V_m = \frac{ds}{dt}$ Rapidez o Celeridad Media

La Velocidad Instantánea es una velocidad media tomada para un dt.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}}$$

$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ Rapidez o celeridad media (norma de $\vec{v}$)

Puede suceder que $\vec{r}$ sea función del tiempo:

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ⇒ Derivo las expresiones en función de t para hallar $v(t)$.

• **Aceleración Media e Instantánea:**

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}} \qquad \boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt}}$$

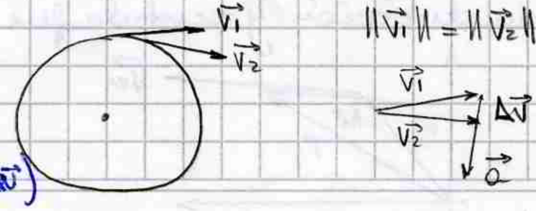
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}}$$

$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

$\vec{a} \neq 0$ si
- varía $\|\vec{v}\| = v$, o sea la rapidez
- varía la dirección de $\vec{v}$ (aún cuando $\|\vec{v}\| = cte$)

En un movimiento circular:



($\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\Delta\vec{v}$)

$\vec{a}$ (apunta hacia el centro).

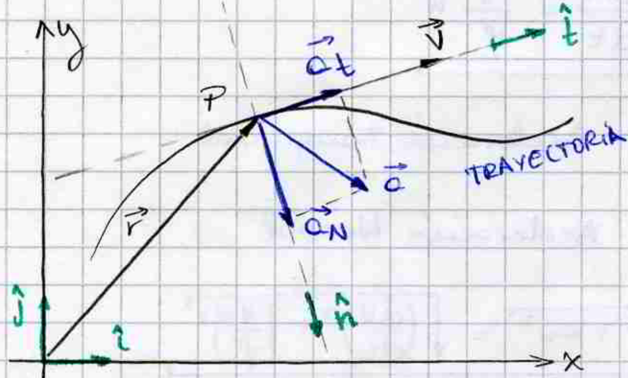
NOTA

HOJA

FECHA

Componentes Tangencial y Normal de la Aceleración:

La dirección de la aceleración no tiene por qué coincidir con la trayectoria. Se busca, entonces, encontrar las componentes tangencial y normal a la curva de la aceleración:



Como el sistema de referencia elegido varía con el tiempo (no está referido a los ejes "x" e "y"), las componentes $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_N$ son componentes INTRÍNSECAS de la aceleración.

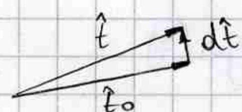
$$\underline{\vec{a} = a_t \cdot \hat{t} + a_N \cdot \hat{n}}$$

$\underline{\hat{t} = f(t)}$ $\underline{\hat{n} = f(t)}$ Los versores elegidos son función del tiempo.

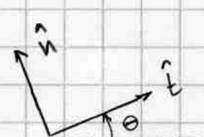
Como la dirección del vector velocidad instantánea es la misma que $\hat{t}$:

$\vec{V} = V . \hat{t}$ $\qquad V = \|\vec{V}\|$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(V . \hat{t}) = \underline{\frac{dV}{dt}\hat{t} + V\frac{d\hat{t}}{dt}} = \vec{a}$$



$\Rightarrow$ El diferencial del vector tangente $d\hat{t}$ es perpendicular a la curva, o sea, tiene dirección NORMAL a la misma. Además, $\frac{d\hat{t}}{dt}$ se dirige hacia la parte cóncava de la trayectoria



Trabajando con las componentes cartesianas de $\hat{t}$ y $\hat{n}$:

$$\hat{t} = \hat{\imath} \cos\theta + \hat{j} \operatorname{sen}\theta$$

$$\hat{n} = \hat{\imath} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{j} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{\imath} \operatorname{sen}\theta + \hat{j}\cos\theta$$

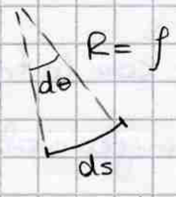
$$\underline{\frac{d\hat{t}}{dt}} = -\hat{\imath} \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{j} \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \underline{\frac{d\theta}{dt}\hat{n}}$$

Además:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\overbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)}^{v} = v\frac{d\theta}{ds}$$

NOTA

Si tomo un ds muy pequeño, puedo considerar que sobre el mismo se está realizando un mov. circular:



$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R\,d\theta$$

$$\text{Angulo} = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = V\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{V\,d\theta}{\rho\,d\theta} = \frac{V}{\rho} \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{V}{\rho}\,\hat{n}$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dV}{dt}\,\hat{t}}_{\vec{a_t}} + \underbrace{\frac{V^2}{\rho}\,\hat{n}}_{\vec{a_n}}}$$

$a_t = \frac{dV}{dt}$ Aceleración tangencial

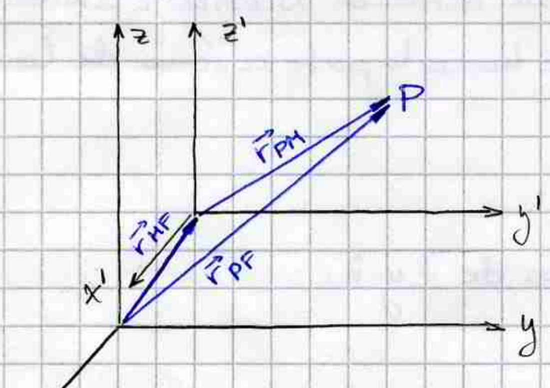
$a_n = \frac{V^2}{\rho}$ Aceleración Normal

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

- La aceleración tangencial se relaciona con la variación de rapidez del cuerpo
- La aceleración normal depende además de la forma geométrica de la curva (con "ρ") y tiene sentido siempre hacia el centro de curvatura.

Movimiento Relativo:

El movimiento de un cuerpo puede describirse respecto a un sistema móvil (S'), el cual se mueve respecto a un sistema fijo (S).



$$\vec{r_{PF}} = \vec{r_{PM}} + \vec{r_{MF}}$$

$$\vec{V_{PF}} = \vec{V_{PM}} + \underbrace{\vec{V_{MF}}}_{}$$

Velocidad del sistema móvil respecto del fijo

NOTA

Dinámica:

1° ley de Newton: Principio de inercia

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza neta, el mismo mantendrá su estado de reposo o se moverá con velocidad constante si así lo estaba haciendo (MRU). La inercia es la tendencia de los cuerpos a conservar su estado de reposo o a mantener su MRU.

Sistemas Inerciales de Referencia: Es un sistema que se desplaza en línea recta y a velocidad constante, sobre el cual un cuerpo aislado (sin interacciones con el medio exterior) situado en él cumple con la 1° ley de Newton. Cualquier otro sistema que se mueva a $\vec{v} = cte$ respecto de él, también será inercial.

2° ley de Newton: Principio de masa

La masa es la magnitud que cuantifica el concepto de inercia (mayor o menor resistencia de un cuerpo a ser acelerado).

$$\sum \vec{F} = m . \vec{a}$$

La suma de las fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo es igual a la masa por la aceleración que adquiere

En dos dimensiones: $\sum \vec{F} = m . \vec{a} \begin{cases} \sum F_x = m . a_x = m . \ddot{x} \\ \sum F_y = m . a_y = m . \ddot{y} \end{cases}$

3° ley de Newton: Principio de Acción y reacción:

La acción (fuerza) que un cuerpo ejerce sobre otro es igual en módulo y dirección, pero opuesta en sentido a la reacción (fuerza) que el otro cuerpo ejerce sobre él. $\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA}$

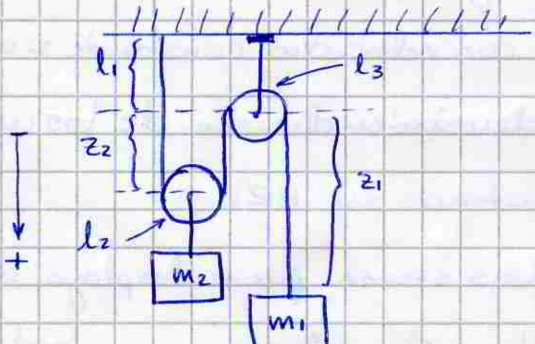
Vínculos o Ligaduras:

Se llama vínculo a cualquier característica física que limite la

NOTA

trayectoria que puede describir un cuerpo. Aquí aparecen las llamadas fuerzas de vínculo que producen un efecto sobre la trayectoria de un cuerpo.

Ejemplo:



Vínculo: $L = l_1 + 2z_2 + l_2 + l_3 + z_1$

L: Longitud total de la soga (CONSTANTE)

l_1, l_2, l_3: CONSTANTES

$$\frac{dL}{dt} = 0 = 2\frac{dz_2}{dt} + \frac{dz_1}{dt}$$

$$0 = 2v_2 + v_1$$

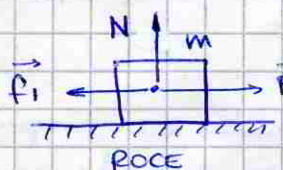
Cuando el cuerpo 2 se mueve hacia abajo ($v_2 > 0$), el cuerpo 1 lo hace hacia arriba ($v_1 < 0$).

$\underline{2v_2 = -v_1} \Rightarrow \underline{2a_2 = -a_1}$

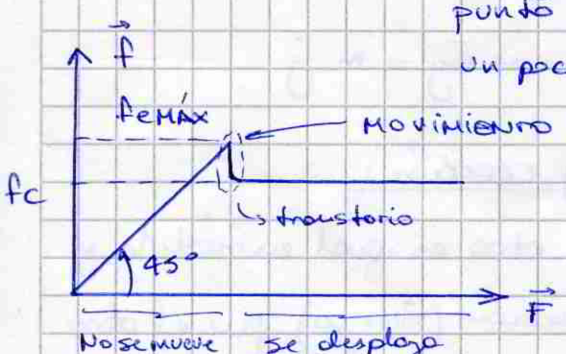
$\underline{2\|v_2\| = \|v_1\|}$

Rozamiento:

La Fuerza de Rozamiento tiene igual dirección pero sentido opuesto al movimiento. Existen 2 tipos: ESTÁTICO y CINEMÁTICO.



Le aplico una fuerza $\vec{F_1}$ al cuerpo. El mismo no se mueve, por lo que existe una fuerza opuesta de igual módulo $\vec{f_1}$. Esta es la fuerza de roce ESTÁTICA. Si sigo aumentando $\vec{F_1}$ y $\vec{f_1}$ aumenta proporcionalmente. Se alcanza un punto de MOVIMIENTO INMINENTE (aumento $\vec{F_1}$ un poco más y el cuerpo se mueve).



Cuando $F > f_{eMÁX}$, el cuerpo se acelera y aparece una fuerza de roce CINEMÁTICO de valor constante.

$$\boxed{f_{eMÁX} = \mu_e \cdot N}$$

Si $f_e < \mu_e \cdot N$, el cuerpo permanece en reposo. (equilibrio ESTÁTICO)

Si $f_e = f_{eMÁX} \Rightarrow$ MOVIMIENTO INMINENTE

$\mu_c < \mu_e$ en general.

$$\boxed{f_c = \mu_c \cdot N}$$

NOTA

HOJA

FECHA

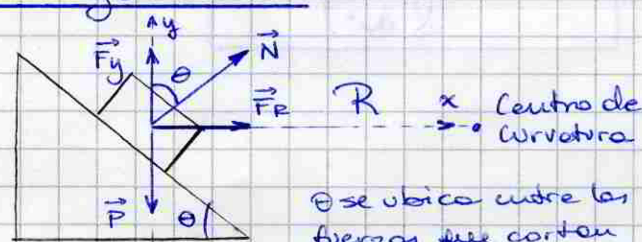
$f_{ESTÁTICO}$ / $f_{CINEMÁTICO}$:
- Dirección paralela a las sup. en contacto
- Relativamente independientes del área de contacto

$f_{CINEMÁTICO}$: Es relativamente independiente de la velocidad relativa entre las superficies, y es opuesto a dicha velocidad relativa.

Si $F = \mu_c \cdot N \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve a velocidad CONSTANTE (equilibrio DINÁMICO)

Curvas Peraltadas:

• Sin rozamiento:



θ se ubica entre las fuerzas que cortan perpendicularmente los lados del triángulo

$\overbrace{\vec{F_R}}$ — Fuerza Centrípeta

$$\begin{cases} \sum F_x = \underbrace{N \operatorname{sen}\theta}_{\vec{F_R}} = m\dfrac{V^2}{R} \quad (1) \\ \sum F_y = N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$N\cos\theta = mg \quad (2)$$

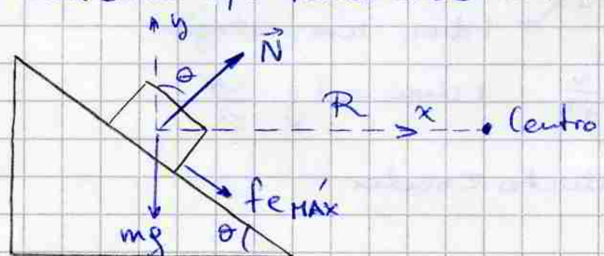
$(1) \,/\, (2)$: $\boxed{\operatorname{tg}\theta = \dfrac{V^2}{Rg}}$

Condición de equilibrio (no se desplaza sobre el plano inclinado).

• Con rozamiento:

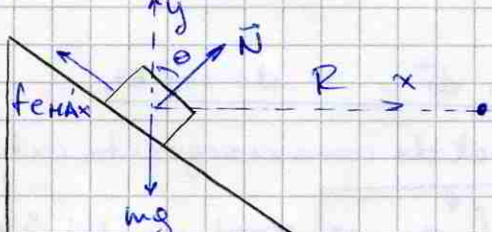
Existirá una $V_{MÁX}$ y una $V_{mín}$ entre las cuales el cuerpo no derrapará.

1) Con el cuerpo tendiendo a ir hacia arriba:



$$\begin{cases} \sum F_x = N\operatorname{sen}\theta + fe_{MÁX}\cos\theta = m\dfrac{V_{MÁX}^2}{R} \\ \sum F_y = N\cos\theta - fe_{MÁX}\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \end{cases}$$

2) Con el cuerpo tendiendo a ir hacia abajo:

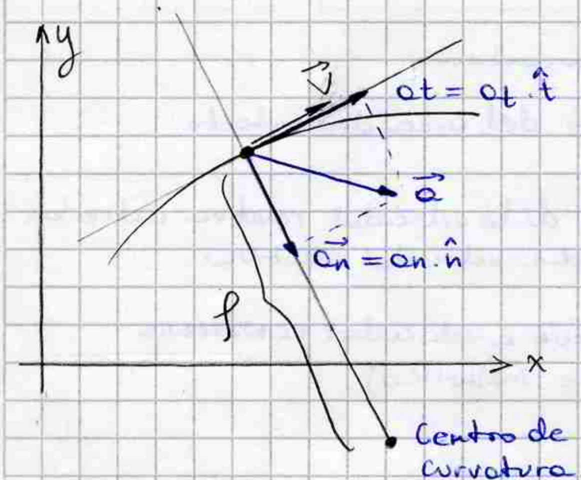


$$\begin{cases} \sum F_x = N\operatorname{sen}\theta - fe_{MÁX}\cos\theta = m\dfrac{V_{mín}^2}{R} \\ \sum F_y = N\cos\theta + fe_{MÁX}\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \end{cases}$$

NOTA

Autor: Ing. Daniel Palombo

Radio de curvatura en función de la velocidad y la aceleración:



$$\boxed{\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}}}$$ (derivando respecto de t).

Si el parámetro fuera "x", derivando respecto de él:

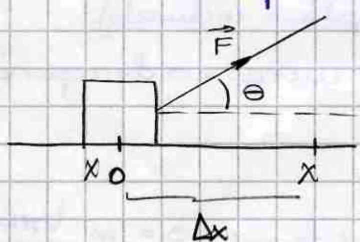
$$\frac{d}{dx}(x) = 1 \qquad \frac{d^2}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\boxed{\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}}$$

Trabajo y Energía:

Trabajo:

Una fuerza realiza trabajo si su punto de aplicación se desplaza, y existe una componente de la misma en la dirección del desplazamiento.



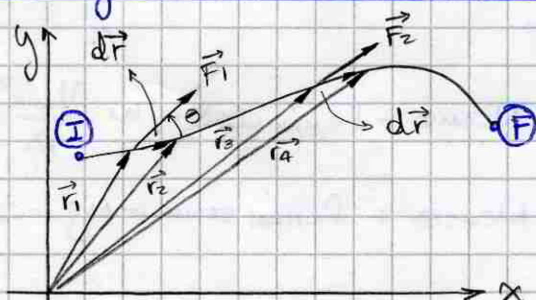
$\boxed{W = F . \Delta x . \cos\theta}$ ES UN ESCALAR.

$[W] = [F][\Delta x]$ → $1N . 1m = 1$ Joule ; 1 dina $. 1cm = 1$ Ergio

$1 N = 1 kg \times \frac{m}{s^2} \qquad 1 \text{ dina} = 1 g . \frac{cm}{s^2}$

Se puede escribir: $\boxed{W = \vec{F} \bullet \vec{\Delta x}}$ Producto Escalar.

Trabajo en un Movimiento Curvilíneo y con Fuerza Variable:



$\|\vec{dr}\| = ds$

$dW = \vec{F} \bullet \vec{dr} = F . ds . \cos\theta$

Considero al ds como un segmento rectilíneo

$$\boxed{W_{IF} = \int_i^f \vec{F} \bullet \vec{dr}}$$ Trabajo total a lo largo de la curva (o sea, depende de la trayectoria)

$$W_{IF} = \int_i^f \left[F_x dx + F_y dy + F_z dz\right]$$

NOTA

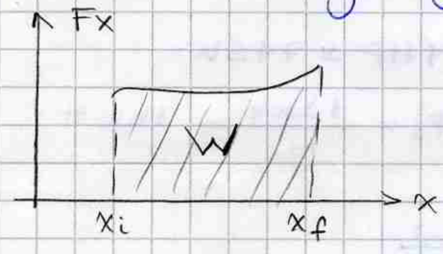
HOJA

FECHA

Si la fuerza $\vec{F}$ es constante en MÓDULO, DIRECCIÓN y SENTIDO:

$$\underline{W} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_i^f d\vec{r} = \underline{\vec{F} \cdot (\vec{r_f} - \vec{r_i})} \qquad \underline{\int_i^f d\vec{r} = \Delta\vec{r}}$$

Si trazo la curva de $F = f(x)$, el trabajo será la superficie formada por dicha curva y el eje x: (cuerpo moviéndose en línea recta, sobre eje x)

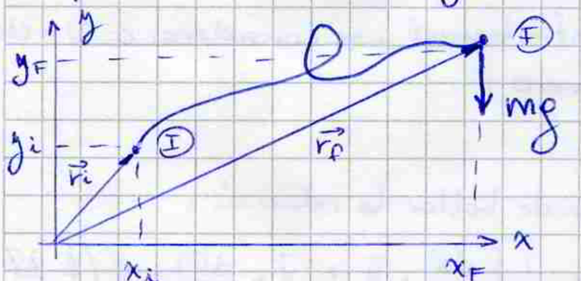


$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

↳ proyección de $\vec{F}$ sobre "x".

Trabajo de la Fuerza Peso:

Se supone a $\vec{g}$ (acel. de la gravedad) constante en módulo, dirección y sentido. Como $\vec{P} = m\vec{g}$ = CONSTANTE, el trabajo $W_{\vec{P}} = P \cdot h$. O sea, no dependerá de la trayectoria sino SOLAMENTE DE LA ALTURA.



$\vec{P} = -mg\,\hat{j}$ (Fuerza Peso).

$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ (vectores $\perp$)

$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ (versores, norma 1)

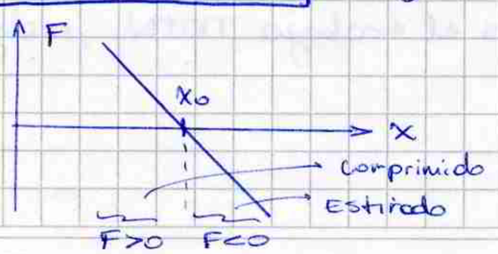
$$W_{\vec{P}_{i,j}} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\overbrace{\vec{r_f} - \vec{r_i}}^{\Delta\vec{r}}) = [-mg\hat{j}] \cdot [(x_F\,\hat{i} + y_F\,\hat{j}) - (x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j})] =$$

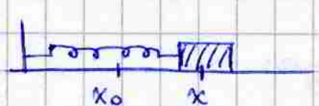
$$= -mg\,(y_F - y_i) = \boxed{-mg\,\Delta y = W_{\vec{P}_{i,j}}} \qquad \Delta y = h.$$

Como la fuerza peso apunta hacia abajo, si el cuerpo sube, $W_{\vec{P}} < 0$

Trabajo de la Fuerza ejercida por un Resorte:

$\boxed{\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r_0})}$ Ley de Hooke $\quad \vec{r_0}$: Longitud natural del resorte.





NOTA

$$W_{k_{i,j}} = \int_{x_i}^{x_F} (-k\,x\,\hat{i})\cdot(dx\,\hat{i}) = -k\int_{x_i}^{x_F} x\,dx = \boxed{-\frac{k}{2}\left(x_F^2 - x_i^2\right) = W_{k_{i,j}}}$$

Tampoco depende de la trayectoria

Potencia:

Es la rapidez con la que se realiza un trabajo

$\boxed{P_m = \frac{W}{\Delta t}}$ Potencia Media

$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$ Potencia Instantánea

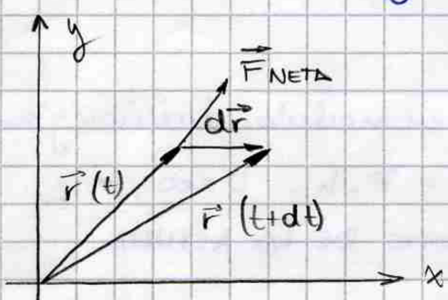
$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{F}\cdot\overbrace{\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}^{\vec{v}}\right) = \boxed{\vec{F}\cdot\vec{v} = P}$$

Producto Escalar.

$1\,HP \simeq 746\,W$

$[P] = \frac{1\,Joule}{1\,s} = 1\,Watt$

Teorema del Trabajo - Energía Cinética:



Sea $\vec{F}_{NETA}$ la fuerza resultante que actúa sobre una partícula. Si el cuerpo se desplaza $d\vec{r}$:

$$dW = \vec{F}_{NETA}\cdot d\vec{r} = \underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{F}_{NETA}}\cdot d\vec{r}$$

Como $d\vec{r}$ es infinitesimal, se considera a $V=cte$ en ese infinitésimo:

$\underline{d\vec{r} = \vec{v}\,dt}$

Además se puede hallar la relación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right)$$

Entonces: $\underline{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2}\,\frac{dv^2}{dt}}$

$$dW = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$dW = \frac{1}{2}m\,d(v^2)$$

$$W = \frac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d(v^2)$$

$$W = \frac{1}{2}m\,v_f^2 - \frac{1}{2}m\,v_i^2 = k_f - k_i = \boxed{\Delta k = W}$$

Se define $\boxed{k = \frac{1}{2}m\,v^2}$ <u>Energía Cinética traslacional</u>

El trabajo NETO que se realiza sobre un cuerpo es igual a la variación en la energía cinética del mismo. Es el trabajo TOTAL, realizado por todas las fuerzas.

Fuerzas Conservativas y No Conservativas:

Una fuerza es conservativa ($\vec{F_C}$) si el trabajo NETO que realiza al desplazar un cuerpo a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es NULO.

Ejemplos: Fuerza Peso y Fuerza Elástica de un resorte.

En cambio, una fuerza no conservativa ($\vec{F_{NC}}$) no cumple lo anterior.

Ejemplo: Fuerza de Roce cinética

Energía Potencial:

Es un concepto únicamente válido para fuerzas conservativas.

$$\boxed{U_{Gravitatoria} = mgh} \qquad \boxed{U_{Elástica} = \frac{1}{2} k x^2}$$

$$W_{\vec{P}} = -mg\,\Delta h \qquad W_{\vec{F}} = -\frac{1}{2}k\left(x_F^2 - x_i^2\right)$$

$$W_{\vec{P}} = -(\underbrace{mgh_F}_{U_{GF}} - \underbrace{mgh_i}_{U_{Gi}}) \qquad W_{\vec{F}} = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}k x_F^2}_{U_{EF}} - \underbrace{\frac{1}{2}k x_i^2}_{U_{Ei}}\right)$$

De esto se infiere que: $\boxed{W_{FC} = -\Delta U}$

Energía Mecánica:

$$W = \int_i^f (\Sigma \vec{F}) \cdot d\vec{r} = \Delta k \qquad \text{Teorema trabajo - energía}$$

separo todas las fuerzas aplicadas en Fc y FNC

$$W = \underbrace{\int_i^f (\Sigma \vec{F_C} \cdot d\vec{r})}_{W_{FC} = -\Delta U} + \underbrace{\int_i^f (\Sigma \vec{F_{NC}} \cdot d\vec{r})}_{W_{FNC}} = \Delta k$$

$$W_T = -\Delta U + W_{FNC} = \Delta k \Rightarrow \boxed{W_{FNC} = \Delta k + \Delta U}$$

Se define a la Energía Mecánica como:

$$\boxed{E = k + U} \Rightarrow \Delta E = \Delta k + \Delta U$$

$$\boxed{\Delta E = W_{FNC}}$$

Si $W_{FNC} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E = \text{constante}$ — Teorema de Conservación de la Energía Mecánica

Momento lineal o Cantidad de Movimiento:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$ Momento lineal de una partícula.

$\vec{p}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$

$[\vec{p}] = [m][\vec{v}] = kg \frac{m}{s} = N.s$

2ª ley de Newton para una partícula (versión real):

$$\boxed{\sum_i \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$\sum_i \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$ Considerando $m = cte$

Se pueden definir los conceptos:

$$\vec{F_m} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$ Fuerza Media

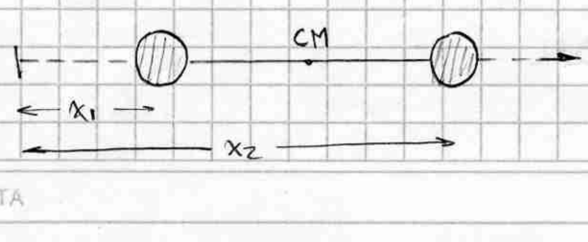
$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$ Fuerza Instantánea

Para una partícula, se considera que todas las fuerzas que actúan sobre ella son EXTERIORES.

Centro de masa:

Formalmente es distinto al centro de gravedad, ya que la masa permanece constante en todo el universo, pero la gravedad varía según la posición en la tierra.

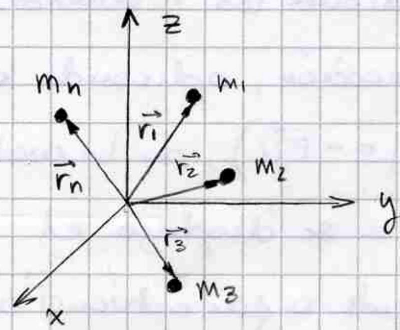
En un sistema de partículas (cuerpo extenso), el centro de masa es un punto que se mueve como si en él estuviera concentrada toda la masa del sistema, y las fuerzas externas que actúan sobre el sistema se aplicaran sobre dicho punto.



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

NOTA

• En el espacio: Sistema de "n" partículas (Distribución discontinua de partículas)



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{M_T}}$$

$$\underline{M_T = \sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{Masa Total}$$

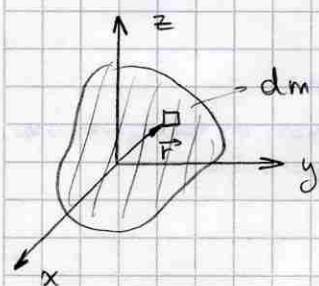
Los coordenadas del CM serán:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M_T} \;;\quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M_T} \;;\quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M_T}$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j} + z_{CM}\,\hat{k}$$

$$\underline{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k} \right)}$$

• Distribución continua de partículas (masas):



Se considera al cuerpo como un sistema rígido, todas las partículas están pegadas una con otra.

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\iiint \vec{r}\, dm}{\int dm}}$$

La integral triple se debe a que es una integral volumétrica.

Para calcularlo se utiliza la densidad.

Densidad
- → Lineal: $\lambda(x) = \frac{dm}{dx}$
- → Superficial: $\sigma(x,y) = \frac{dm}{ds}$ → diferencial de superficie
- → Volumétrica: $\rho(x,y,z) = \frac{dm}{dV}$ → diferencial de volumen

Para la densidad lineal:

Si $\lambda = cte$: $\quad M = \lambda . L$

Si $\lambda \neq cte$: $\quad dm = \lambda(x)\,dx \Rightarrow M = \int_0^L \lambda(x)\,dx$

$$x_{CM} = \frac{\int x . dm}{\int dm} \;;\quad y_{CM} = \frac{\int y . dm}{\int dm} \;;\quad z_{CM} = \frac{\int z . dm}{\int dm}$$

$\int dm = M_T$ (Masa total del cuerpo)

Momento lineal de un sistema de partículas:

En un sistema de partículas, las mismas pueden interactuar entre sí mediante las $\vec{F}_{INTERNAS}$, y con el medio mediante las $\vec{F}_{EXTERNAS}$. Pero como las $\vec{F}_{INTERNAS}$ son de Acción y Reacción, aplicando la 3° ley de Newton se cancelan entre sí ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$), por lo cual su resultante es NULA. Esto implica que si se desplaza el Centro de Masa se debe pura y exclusivamente a que actúan $F_{EXTERNAS}$.

Por definición: $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$

$$M.\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$ Derivo respecto del tiempo:

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M.\vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}_{SISTEMA}$$

Velocidad del centro de masa.

$\vec{p}_i$: cant. de mov. de cada partícula

$\vec{V}_i$: velocidad de cada partícula.

$$\boxed{\vec{P}_{SIST} = M.\vec{V}_{CM}}$$

2° ley de Newton para un sistema de partículas:

$\vec{P}_{SIST} = \sum_i \vec{p}_i = M.\vec{V}_{CM}$ Derivo respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{P}_{SIST}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = M.\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}_{SIST}}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = M.\vec{a}_{CM}$$ Además: $\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{EXTERIORES}$

Sumo TODAS las fuerzas que actúan sobre el sistema. Las INTERIORES se anulan entre sí.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{SIST}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\,EXTERIORES} = M\vec{a}_{CM}}$$

$\vec{a}_{CM}$: Aceleración del centro de masa.

- Cada $\vec{p}_i$ puede modificarse si actúan $\vec{F}_{INTERNAS}$ o $\vec{F}_{EXTERNAS}$, pero el $\vec{P}_{SIST}$ sólo puede variar si actúa una $\vec{F}_{EXTERNA}$ <u>NETA</u>
- El CM se mueve como una partícula de masa M con aceleración $\vec{a}_{CM}$, como si sobre el mismo actuara la resultante de todas las $\vec{F}_{EXTERIORES}$

NOTA

Teorema de Conservación del Momento Lineal:

Si $\sum_i \vec{F}_{i\,EXTERIORES} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{SIST} = \text{CONSTANTE}$

$\sum_i \vec{F}_{i\,EXTERIORES} = \frac{d\vec{P}_{SIST}}{dt} = 0 \rightarrow$ tiene que ser una constante.

(Suponiendo $M = \text{CONSTANTE}$)

Además:

$\sum_i \vec{F}_{i\,EXTERIORES} = M \cdot \vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{CM} = \text{CONSTANTE}}$

Esto explica que SÓLO puede variar la velocidad del CM si actúan fuerzas exteriores, y su resultante no es nula. Las partículas pueden estar desplazándose respecto del CM, y no desplazarse el mismo.

Colisiones:

Es el proceso por el cual las partículas que intervienen modifican sus momentos lineales, pero manteniendo CONSTANTE el momento lineal del sistema.

Durante el tiempo de contacto (tc) que dura la colisión pueden considerarse a las $\vec{F}_{EXTERIORES}$ despreciables frente a las $\vec{F}_{INTERIORES}$, que son muy grandes. Este tiempo tc es muy corto.

$\sum \vec{F}_{ext} \simeq 0 \Rightarrow \vec{P}_{SIST} = \text{CONSTANTE}.$

A las fuerzas grandes que actúan en períodos muy cortos de tiempo se las llama FUERZAS IMPULSIVAS.

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \vec{F}\,dt = d\vec{P} \qquad \int_0^t \vec{F}\,dt = \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} d\vec{P} = \vec{P} - \vec{P}_0 = \Delta\vec{P}$

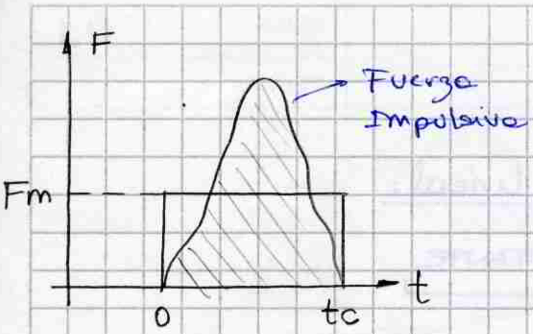
Impulso de la fuerza $\vec{F} = J = m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \Delta\vec{P}$

Cuando una fuerza actúa durante un cierto tiempo "t", produce una VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión, se mantiene constante $\vec{P}_{SIST}$.

NOTA

Autor: Ing. Daniel Palombo



Busco encontrar una $\vec{F}$media tal que logre la misma superficie ($\Delta\vec{p}$, impulso) en el mismo período de tiempo $\Delta t = tc$:

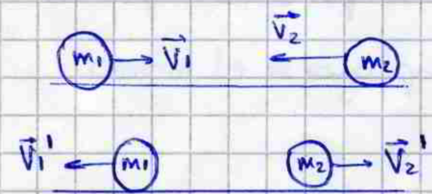
$$\Delta p = \int_0^{tc} F\,dt = \int_0^{tc} Fm\,dt$$

$$\int_0^{tc} F\,dt = Fm \int_0^{tc} dt = Fm \cdot tc$$

$$\boxed{Fm = \frac{1}{tc}\int_0^{tc} F\,dt}$$

Clasificación de las colisiones:

- Choque perfectamente ELÁSTICO: Se conserva, además, k (energía cinética)



Unidimensional:

$$\vec{P}_{SIST} = \vec{P}_{SIST}'$$

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \quad (1)$$

$$k = k'$$

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_1 V_2'^2 \quad (2)$$

De (1) y (2): $V_2 - V_1 = -(V_2' - V_1')$ (3)

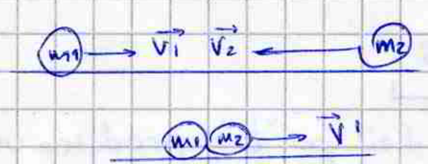
Reemplazando (3) en (1):

$$V_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) V_2$$

$$V_2' = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) V_2 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) V_1$$

Como la conservación de $\vec{p}$ surge de aplicar la 2ª ley de Newton, y la misma tiene vigencia sólo en los SIR, también la harán estas expresiones

- Choque perfectamente INELÁSTICO: NO se conserva k. (choque PLÁSTICO)



En un choque INELÁSTICO, la variación de k se debe al trabajo ejercido por las fuerzas INTERIORES NO CONSERVATIVAS

$$\boxed{W_{INT\,NC} = \Delta k}$$

Si $W_{INT\,NC} < 0 \Rightarrow k_f < k_i$

Si $W_{INT\,NC} > 0 \Rightarrow k_f > k_i$

NOTA

Autor: Ing. Daniel Palombo

HOJA

FECHA

Unidimensional:

$$\vec{P}_{sist} = \vec{P}_{sist}'$$

$$\vec{V_1}' = \vec{V_2}' \implies m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V'$$

$$\boxed{V' = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}}$$

• Choque no perfectamente INELÁSTICO:

Es una situación intermedia entre ambos casos. Tampoco se conserva K.

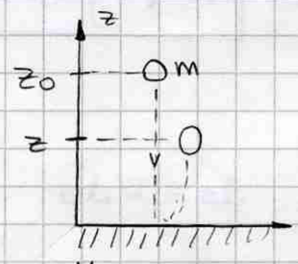
Coeficiente de Restitución:

$$\boxed{e = -\left(\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}\right)}$$

$$0 \leq e \leq 1$$

Perfectamente inelástico ($e = 0$) — Perfectamente elástico ($e = 1$)

Cálculo del coeficiente de restitución:



$M_T \to \infty$

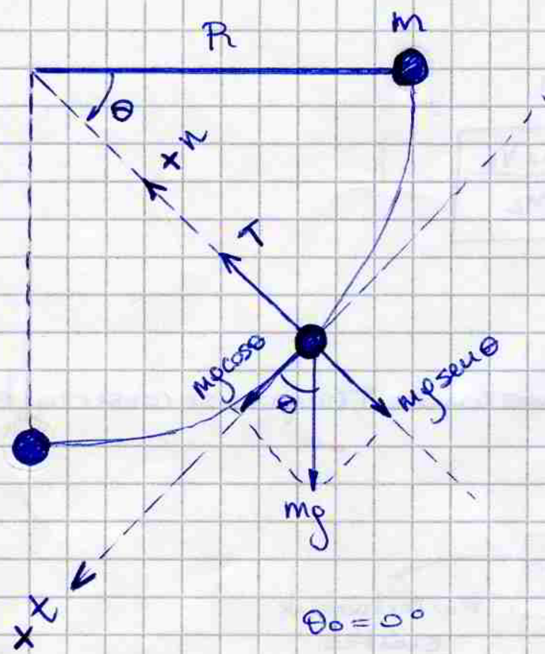
$$e = -\left(\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}\right) \qquad V_1 = V_T = 0 \qquad V_1' = V_T' = 0$$

$$V_2 = -\sqrt{2 g z_0} \qquad V_2' = \sqrt{2 g z}$$

$$e = -\frac{\sqrt{2gz}}{-\sqrt{2gz_0}} = \boxed{\sqrt{\frac{z}{z_0}} = e}$$

NOTA

Péndulo y Movimiento Circular:



$\theta_0 = 0°$

$V_0 = 0\ \frac{m}{s}$

Dirección Tangente:

$\sum F_t:\quad mg\cos\theta = m\frac{dV}{dt} \longrightarrow$ Acel. Tangencial

Dirección Normal:

$\sum F_n:\quad T - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{V^2}{\rho} \longrightarrow$ Acel. Normal

$\rho = R$

Cálculo de la velocidad en función de θ:

$$\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}\frac{dV}{dt}\cdot\frac{d\theta}{d\theta}$$

$$g\cos\theta = \omega\frac{dV}{d\theta} = \frac{V}{R}\frac{dV}{d\theta}$$

$$\int_0^\theta g\cos\theta\,d\theta = \int_0^V \frac{V'}{R}\,dV'$$

$$g\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{V^2}{2R} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{2gR\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

Relaciones Importantes del Movimiento Circular:

- Velocidad Angular: $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$ $\quad d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R\,d\theta$

$$\omega = \frac{ds}{R\,dt} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{V}{R}}$$

Velocidad Angular Instantánea: ω
Velocidad Tangencial Instantánea: V
R: Radio.

- Para Movimiento Circular Uniforme:

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

f: Frecuencia [Hz]
T: Período (τ) [s]

Para θ pequeños se puede aproximar: $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

NOTA

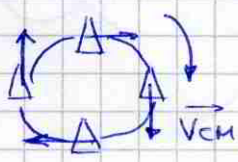
Cuerpo Rígido:

Un cuerpo rígido es un conj de partículas en el cual las distancias relativas entre cualquiera de sus puntos es invariable (con o sin fuerzas aplicadas)

Tipos de movimientos:

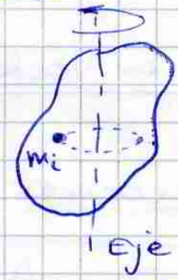
• Traslación Pura:

Todos los puntos del C.R. tienen la misma velocidad y aceleración (la del Centro de Masa). Por ello basta analizar el movimiento del C.M. La trayectoria puede ser circular o curva:



• Rotación Pura:

Todos los puntos del C.R. describen circunferencias concéntricas con un eje en común (EJE DE ROTACIÓN) que permanece fijo en el movimiento. Cada partícula realiza un movimiento circular.



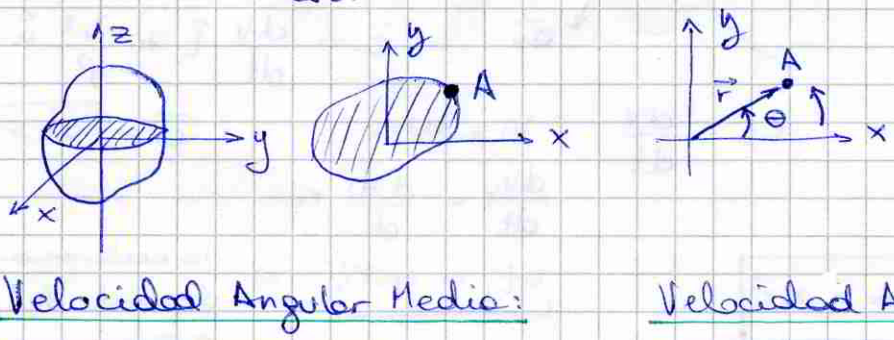
• Roto-traslación Planar:

Es una combinación de los 2 movimientos puros antes mencionados. El eje de rotación se desplaza, pero se mantiene en el mismo plano (NO CAMBIA su dirección en el tiempo), o sea se mantiene paralelo.

Por convención se considera en la dirección del EJE Z al EJE DE ROTACIÓN

• Rotación Pura Planar Cinemática:

Todos los puntos de un C.R. en rotación pura ubicados en el mismo plano perpendicular al eje de rotación, deben girar el mismo $\Delta\theta$ en un mismo Δt.



Movimiento Circular de cada partícula.

Velocidad Angular Media:

$$\boxed{\omega_m = \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \qquad [\omega] = \frac{1}{s}$$

Velocidad Angular Instantánea:

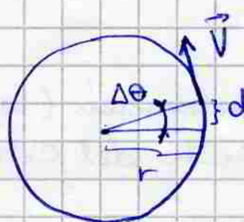
$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}}$$

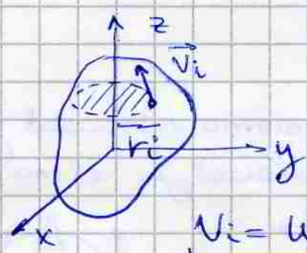
$\theta > 0$: Sentido Antihorario por convención

Representación Vectorial de $\vec{\omega}$:

La dirección del vector $\vec{\omega}$ es paralelo al eje z (de rotación) y su sentido se determina según el sentido de giro, por la regla de la mano derecha.

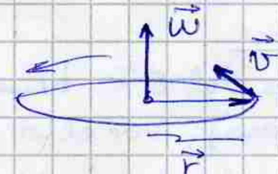
En cualquier punto del C.R, la velocidad angular es la misma. Pero no así la velocidad instantánea $\vec{V}$:





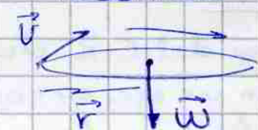
$\underline{V_i = \omega \cdot r_i}$

$V = \frac{ds}{dt}$ ⇒ Depende del arco recorrido



$\vec{\omega}$ es ⊥ al plano xy
$\vec{v}$ es // al plano xy
Se ubica a $\vec{\omega}$ sobre el eje z.

Relación Vectorial: $\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$



Aceleración Angular Media:

$$\boxed{\alpha_m = \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

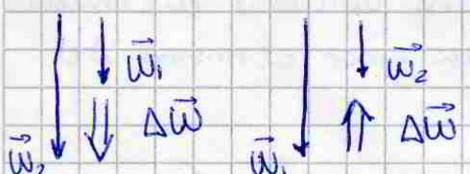
$[\alpha] = \frac{1}{s^2}$

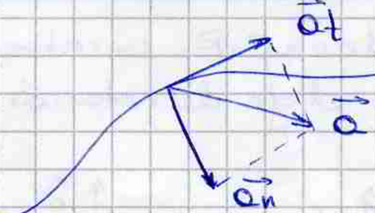
Acel. Angular Instantánea:

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}}$$

Representación Vectorial de $\hat{\alpha}$:

La dirección del vector $\vec{\alpha}$ es paralelo al eje z y su sentido coincide con el del vector $\Delta\vec{\omega}$.





(En coordenadas Intrínsecas)

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{V^2}{\rho}\hat{n}$$

$a_t = \frac{dv}{dt}$

$V_i = \omega r_i$

$\frac{dV_i}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r_i$

$\underline{a_{t_i} = \alpha \cdot r_i}$ ⇒ la aceleración tangencial depende del punto en el C.R.

$a = \sqrt{a_t + a_n}$

Relación Vectorial: $\boxed{\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$

+z ● ⇒ Semieje Positivo z SALIENTE

+z ⊗ ⇒ Semieje Positivo z ENTRANTE

NOTA

Integración de las Ecuaciones del Movimiento:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \qquad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \qquad \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)}$$

• Rotación Pura Planar Dinámica:

Energía Cinética de un Cuerpo en Traslación Pura:

Todas las partículas del CR tienen la misma $\vec{v}$, sumo las energías cinéticas.

$k_i = \frac{1}{2} m_i v^2 \Rightarrow$ Para una partícula

$$k_{traslacional} = \sum_{\forall i} k_i = \frac{1}{2} v^2 \underbrace{\sum_{\forall i} m_i}_{M \text{ (masa del CR)}} \Rightarrow \boxed{k_{traslacional} = \frac{1}{2} M v^2}$$

Energía Cinética de un Cuerpo en Rotación Pura:

Todas las partículas del CR tienen la misma $\vec{\omega}$.

$v_i = \omega . r_i$

$k_i = \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 \Rightarrow$ Para una partícula

$$k_{rotacional} = \sum_{\forall i} k_i = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_{\forall i} m_i r_i^2}_{I \text{ (momento de Inercia)}} \Rightarrow \boxed{k_{rotacional} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Momento de Inercia (I):

Se define respecto de un eje de rotación y depende, además de la ubicación de dicho eje, de cómo esté distribuida la masa en los planos $\perp$ al eje de rotación.

Es la medida de la oposición (inercia) al cambio en la rotación de un cuerpo.

$[I] = kg.m^2$

• Distribución discreta de masas: (Ej: sistema solar)

$$\boxed{I = \sum_{\forall i} m_i r_i^2}$$ r_i: distancia al eje de rotación

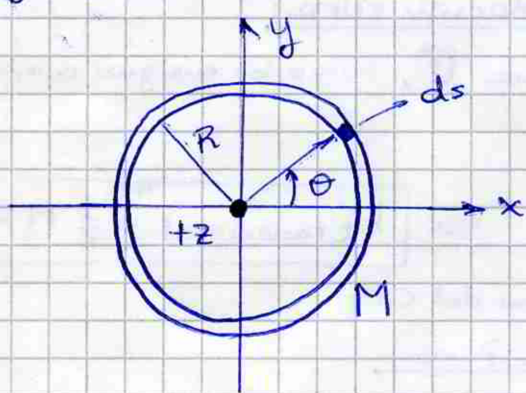
• Distribución continua de masas: (Ej: cuerpo Rígido)

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

Según el objeto, utilizo:

- Densidad Lineal: $\lambda(x) = \dfrac{dm}{dx}$ o $\dfrac{dm}{ds}$ (Ej: anillo)
  $ds \rightarrow$ Arco
- Densidad Superficial: $\Gamma(x,y) = \dfrac{dm}{dA}$ (Ej: Disco)
  $dA \rightarrow$ Área
- Densidad Volumétrica: $\rho(x,y,z) = \dfrac{dm}{dV}$ (Ej: cilindro)

Ejemplo: Cálculo del momento de inercia de un anillo



la distribución de masas es homogénea

$$\lambda = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{2\pi R} \qquad \lambda\, ds = dm$$

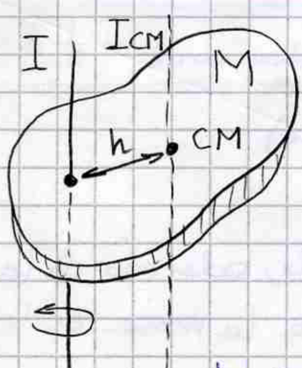
$$ds = d\theta \cdot R$$

$$I = \int R^2\, dm = \int R^2 \lambda\, ds$$

$$I = \lambda R^2 \int_0^{2\pi} R\, d\theta = \lambda R^3 (2\pi - 0)$$

$$I = \frac{M}{\cancel{2\pi R}} R^{\cancel{3}\,2}\, \cancel{2\pi} \Rightarrow \boxed{I = MR^2}$$

Teorema de los Ejes Paralelos (Steiner):



Al momento de inercia respecto de un eje que pasa por el CM se lo llama MOMENTO BARICÉNTRICO

El momento de inercia respecto a un eje cualquiera paralelo al eje anterior es:

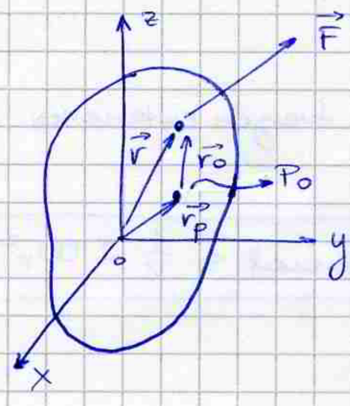
$$\boxed{I = I_{CM} + M h^2}$$

h: Distancia entre el eje que pasa por el CM y el eje respecto del cual se desea calcular I.

Momento de una Fuerza:

Si se aplica una fuerza sobre el CM de un cuerpo produce una traslación pura. Si en cambio se aplica en otro punto se producirá además una rotación. Dicha rotación depende del módulo de la fuerza aplicada, de su dirección y de su punto de aplicación. Además le proporcionará al cuerpo una aceleración angular.

El momento de una fuerza se define respecto de un punto.



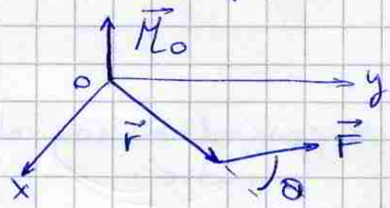
Se define el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto del punto P_0 como:

$$\boxed{\vec{M}_{P_0} = \vec{r_0} \times \vec{F}}$$

Respecto del centro de coordenadas:

$$\underline{\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}}$$

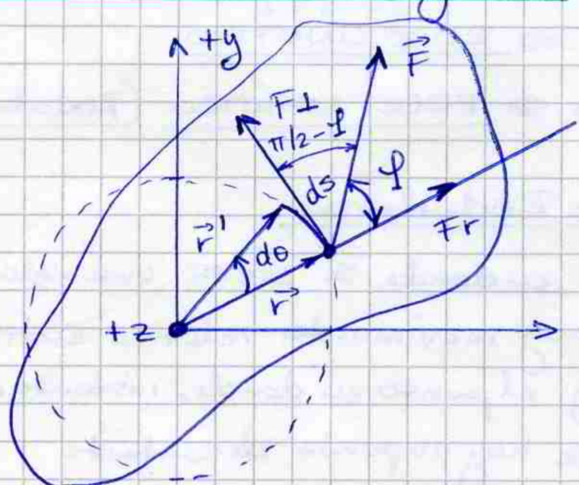
$\vec{M}$ se ubica en un plano $\perp$ al formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$, y su sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha de $\vec{r}$ a $\vec{F}$.



$$\|\vec{M}_0\| = M_0 = r F \operatorname{sen}\theta$$

Si la recta de acción de F pasa por el punto "O" (casos $\theta = 0°$, $\theta = 180°$), $\underline{\vec{M}_0 = 0}$ (NULO)

Relación entre $\vec{M}$ y α:



Supongo que se le aplica una fuerza $\vec{F}$ en un determinado punto del cuerpo, que produce una acel angular.

$\vec{F}$ se encuentra sobre el plano xy.

$$d\theta = \frac{ds}{r}$$

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F ds \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \right)}_{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$dW = F ds \operatorname{sen}\varphi \qquad F\operatorname{sen}\varphi = F\perp$$

$$ds = r d\theta$$

$$dW = \underbrace{F\perp \cdot r}_{M_0} . d\theta$$

Diferencial de trabajo rotacional $\Leftarrow$ $\underline{dW_{rotacional} = M_0 \, d\theta}$

Por el teorema Trabajo - Energía Cinética:

$$dW_{rotacional} = dk_{rotacional} \qquad k_r = \frac{1}{2} I w^2$$

$$M_0 \, d\theta = I w dw \qquad dk_r = \frac{1}{\cancel{2}} I \cancel{2} w \, dw = I w dw$$

$$M_0 \cancel{w} dt = I \cancel{w} dw \qquad w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = w dt$$

Autor: Ing. Daniel Palombo

$M_0 = I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{M_0 = I \cdot \alpha}$ $\boxed{\vec{M}_0 = I \cdot \vec{\alpha}}$ Segunda ley de Newton para la rotación

Si existiera más de una fuerza aplicada:

$\boxed{\sum \vec{M}_{EXT} = I\vec{\alpha}}$ (suma de los momentos de las fuerzas exteriores aplicadas)

$dW_{rotacional} = I\omega d\omega \Rightarrow$ Integrando: $\boxed{W_{rotacional} = \frac{1}{2} I \omega_F^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2}$

Roto-Traslación Planar:

- El movimiento de rotación es planar (eje de rotación // eje z)
- El movimiento de traslación está contenido siempre en un mismo plano // al xy.

Energía Cinética de Roto-Traslación:

$$\boxed{k = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{\text{traslación pura del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}_{\text{rotación pura alrededor de un eje que pasa por el CM}}}$$

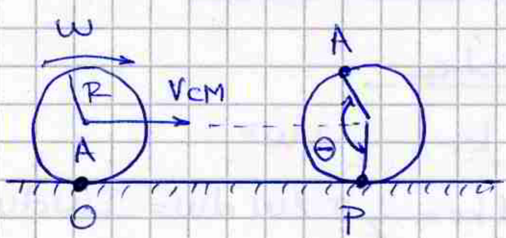
En general no hay relación entre: $V_{CM} \longleftrightarrow \omega$

Rototraslación
- con deslizamiento $\Rightarrow$ ROCE CINÉTICO
- Sin deslizamiento $\Rightarrow$ ROCE ESTÁTICO (Rodadura)

Roto-traslación SIN deslizamiento o Rodadura:

Es un caso especial de roto-traslación en donde SÍ EXISTE una relación entre V_{CM} y ω. Se da cuando no hay movimiento relativo entre la superficie del cuerpo que rototraslade y el punto en donde, instante a instante, se apoya en el suelo. Siempre hay un punto de contacto distinto entre el cuerpo y la superficie donde se desplaza. Por ello:

- La fuerza de roce entre ellos será ESTÁTICA (en caso de existir)
- Dicha fuerza f_e NO REALIZARÁ TRABAJO.



$\overset{\frown}{PA}$ (arco) $= \overline{OP}$ (segmento rectilíneo)

$\theta = \frac{\overset{\frown}{PA}}{R} \Rightarrow R\theta = V_{CM}\, t$

$V_{CM} = R \frac{\theta}{t}$

$\boxed{V_{CM} = R\omega}$ Condición de RODADURA

En Rodadura se cumple: $\begin{cases} V_{CM} = \omega R \\ a_{CM} = \alpha R \end{cases}$

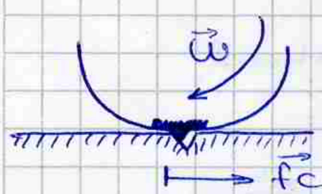
NOTA

Roto-traslación CON deslizamiento:

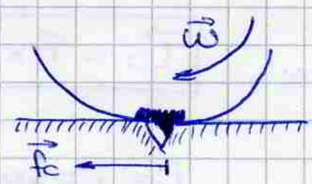
Existen 2 casos básicos:

- El arco girado es MAYOR a lo avanzado linealmente ($V_{CM} < \omega R$) CASO 1
- El arco girado es MENOR a lo avanzado linealmente ($V_{CM} > \omega R$) CASO 2

En ambos casos aparecerá una fuerza de roce cinética:



CASO 1: la aspereza del cuerpo "choca" a la del piso



CASO 2: la aspereza del piso "choca" a la del cuerpo

Un movimiento de rototraslación puede iniciarse en condición de rodadura ($V_{CM_0} = \omega_0 R$) o en algunos de los casos expuestos. En estos últimos la fuerza de roce cinética f_c ejercerá un momento $M_{F_c} = R \cdot f_c$ respecto del CM que llevará al movimiento a la condición de rodadura.

CASO 1: $\underbrace{V_{CM_0} < \omega_0 R}$ $\Rightarrow$ Disminuye ω y aumenta V_{CM} $\xrightarrow{\text{hasta } t = t_R}$ $\underbrace{V_{CM}(t_R) = \omega(t_R) \cdot R}$

CASO 2: $\underbrace{V_{CM_0} > \omega_0 R}$ $\Rightarrow$ Aumenta ω y disminuye V_{CM} $\xrightarrow{\text{hasta } t = t_R}$ $\underbrace{V_{CM}(t_R) = \omega(t_R) \cdot R}$

A partir de t_R y para $t \geq t_R$, el cuerpo rodará con $V_{CM} = V_{CM}(t_R) = cte$ y $\omega = \omega(t_R) = cte$ (para cuerpo rígido perfecto y superficie indeformable).

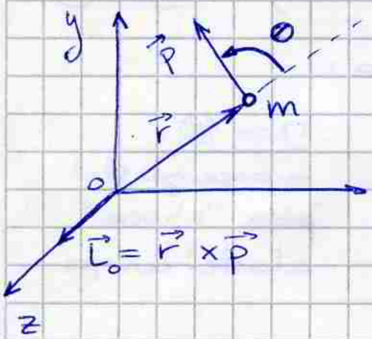
R.T. sin deslizamiento (RODADURA)	R.T. con deslizamiento
$0 \leq f_e \leq f_{e\,MÁX} = \mu_e \cdot N$	$f_c = \mu_c \cdot N$
$V_{CM} = \omega R$, $a_{CM} = \alpha R$	$V_{CM} \neq \omega R$
$W_{roce} = 0$	$W_{roce} \neq 0$

Cuando un cuerpo roto-traslada sin deslizar y $f_e = f_{e\,MÁX} = \mu_e N$, es **INMINENTE** que deje de roto-trasladar sin deslizar.

Mientras que $f_e \leq \mu_e N$, el cuerpo mantendrá la condición de rodadura.

Momento Angular:

Es análogo en la rotación al momento lineal en la traslación.



Se define al momento angular de una partícula "m" respecto del punto "o" como:

$$\boxed{\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$\vec{p}$: momento lineal

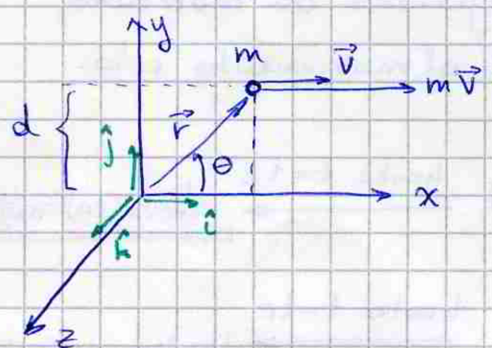
$\vec{p} = m\vec{V}$

$L = rp\,\text{sen}\,\theta$

$[L] = kg\,\frac{m^2}{s}$

$$\boxed{L = rmV\,\text{sen}\,\theta}$$

Momento angular de una partícula que se mueve en línea recta:



$L_o = rp\,\text{sen}\,\theta \qquad d = r\,\text{sen}\,\theta$

$$\boxed{L_o = p.d}$$

$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times mV\hat{i}$

$\vec{L}_o = (x\hat{i} \times mV\hat{i}) + (y\hat{j} \times mV\hat{i})$

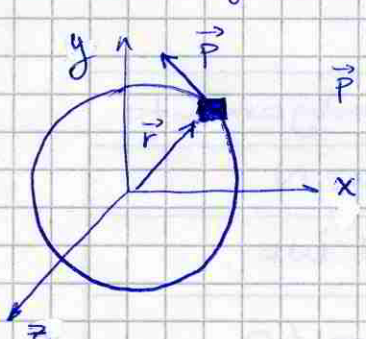
$\hat{i} \times \hat{i} = 0$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$y = d$

$$\boxed{\vec{L}_o = -dp\,\hat{k}}$$

Momento angular de una partícula en un movimiento circular:



$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$

$L_o = rmV\,\text{sen}\,90°$

$\underline{L_o = rmV}$

Si $V = cte \Rightarrow L_o = cte$

$V = \omega r \Rightarrow L_o = rm\omega r = mr^2\omega$

$$\boxed{L_o = I\omega}$$ SOLAMENTE en este caso, donde $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

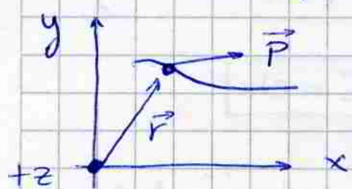
NOTA

HOJA

FECHA

Relación entre $\vec{M}$ y $\vec{L}$:

• **Para una partícula:**



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Derivo respecto del tiempo:

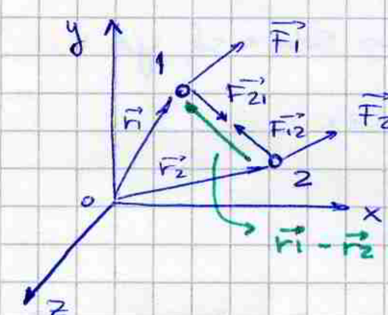
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$(\vec{v} \times \vec{v} = 0)$

La variación de $\vec{L}$ respecto de t depende del momento de la fuerza aplicada. Además, el vector $\Delta\vec{L}$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{M}$.

• **Para un sistema de partículas:**



$\vec{F_{21}} = -\vec{F_{12}}$ (pares de acción y reacción)

Busco analizar el efecto de estas fuerzas interiores sobre el momento angular del sistema:

$$\sum \vec{M}_{INTERNAS} = \vec{r_1} \times \vec{F_{21}} + \vec{r_2} \times \vec{F_{12}} = \vec{r_1} \times \vec{F_{21}} - \vec{r_2} \times \vec{F_{21}}$$

$$\sum \vec{M}_{INTERNAS} = \underbrace{(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F_{21}}}_{\text{el vector } (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \text{ es colineal con } \vec{F_{21}}} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{TOTALES} = \underbrace{\sum \vec{M}_{INT}}_{0} + \sum \vec{M}_{EXT} \Rightarrow \sum \vec{M}_{TOTALES} = \sum \vec{M}_{EXT}$$

$$\vec{L}_{SISTEMA} = \sum_{\forall i} \vec{L_i} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{SISTEMA}}{dt} = \sum \vec{M}_{EXT}}$$

Teorema de Conservación del Momento Angular:

$$\text{Si } \sum \vec{M}_{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow \boxed{\vec{L_i} = \vec{L_f}}$$

• Es un teorema de carácter vectorial, o sea si $\vec{L} = cte \Rightarrow$ $L_x = cte$, $L_y = cte$, $L_z = cte$

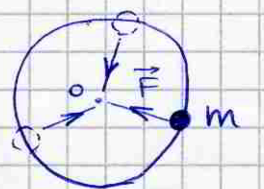
• Puede ser $\sum \vec{M}_{EXT} \neq 0$ aún cuando $\sum \vec{F}_{EXT} = 0$.

• Puede suceder que, p ej, $L_z = cte$, pero $L_y \neq cte$ y $L_x \neq cte$.

NOTA

Fuerzas Centrales:

Son fuerzas cuyas rectas de acción pasan por el centro de una trayectoria curva, por lo que su momento respecto de ese punto es NULO.



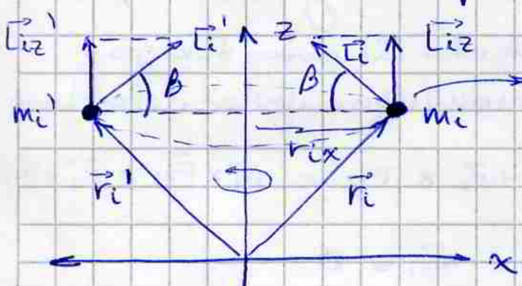
En todo momento, $\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ (son colineales)

$\Downarrow$

$\sum \vec{M}_o = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L}_o = cte}$

Cuerpo Rígido que rota alrededor de un eje FIJO, además de simetría:

Para el caso de una partícula que rota alrededor de un eje z, $\vec{L}$ no es // a $\vec{\omega}$ por lo cual NO SE CUMPLE $\vec{L} = I\vec{\omega}$. En cambio, para un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo que además es de simetría SÍ SE CUMPLE. Las contribuciones de los momentos angulares $\vec{L}_i$ de las masas m_i sobre los ejes x e y se ANULAN con las de las masas m_i' simétricas. Sólo permanecen las contribuciones sobre el eje z.



$\vec{v}_i$ entrante.

$$\begin{cases} L_z = \sum_{\forall i} L_{iz} \\ L_x = 0 \\ L_y = 0 \end{cases}$$

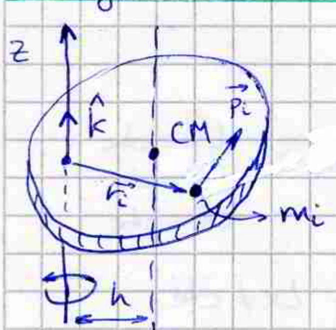
$\vec{L}_i$ es $\perp$ a $\vec{r}_i$ y $\perp$ a $\vec{v}_i$

$L_{iz} = L_i \operatorname{sen}\beta = L_i \dfrac{r_{ix}}{r_i} = \cancel{r_i} p_i \dfrac{r_{ix}}{\cancel{r_i}} = m_i v_i r_{ix}$

$\underline{L_{iz} = m_i \omega r_{ix}^2}$, ya que $v_i = \omega . r_{ix}$

$$L_z = \sum_{\forall i} m_i \omega . r_{ix}^2 = \omega \underbrace{\sum_{\forall i} m_i r_{ix}^2}_{I} \Rightarrow L_z = I\omega \Rightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Momento Angular de un disco que gira alrededor de un eje paralelo a su eje de simetría situado a una distancia "h":



$\vec{L}_i/_o = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{L}_i/_o = m_i v_i r_i \hat{k} = m_i r_i^2 \omega \hat{k}$

$\vec{L}_o = \omega \sum_{\forall i} m_i r_i^2 \hat{k} \Rightarrow \underline{\vec{L}_o = I_o \omega \hat{k}}$

Por Steiner: $\vec{L}_o = (I_{CM} + Mh^2)\,\omega\hat{k} = I_{CM}\omega\hat{k} + Mh^2\omega\hat{k}$

$\boxed{\vec{L}_o = \vec{L}_{CM} + M v_{CM} h \hat{k}}$ $\qquad v_{CM} = \omega h$

$\vec{L}_{CM}$: Momento angular respecto del CM

NOTA

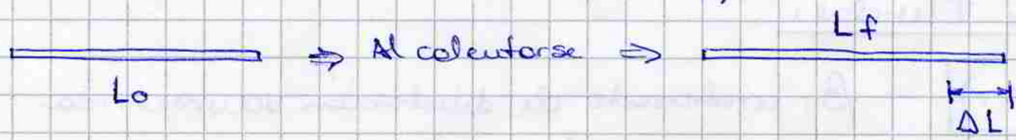
HOJA

FECHA

Termodinámica

Dilatación Térmica:

• **Dilatación lineal (unidimensional):**



Cuando aumenta la temperatura de un cuerpo, éste se dilata. La magnitud de la dilatación (en este caso Δl) es función de la temperatura y del material.

$$\boxed{L = L_o\left(1 + \alpha \Delta T\right)} \qquad \boxed{\alpha = \frac{\Delta L}{L_o \Delta T}}$$

α: coeficiente de dilatación lineal del material

$[\alpha] = \frac{1}{°C}$ ó $[\alpha] = \frac{1}{°K}$

ΔT: variación de temperatura.

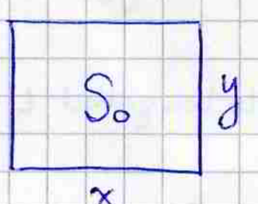
Por ser una variación: $\Delta T[°K] = \Delta T[°C]$

Δl: variación de longitud

$\Delta l = L - L_o$

El coeficiente α es el incremento relativo de longitud $\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right)$ por incremento de temperatura (ΔT)

• **Dilatación Superficial (Bidimensional):**



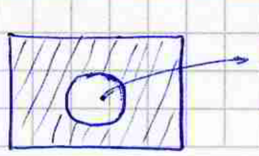
Supongo que el material dilata lo mismo en ambas dimensiones:

$x = x_o\left(1 + \alpha \Delta T\right)$ $\qquad xy = x_o\left(1+\alpha\Delta T\right) y_o\left(1+\alpha \Delta T\right)$

$y = y_o\left(1 + \alpha \Delta T\right)$ $\qquad S = S_o\left(1 + 2\alpha\Delta T + \underline{\alpha^2 \Delta T^2}\right)$

El término $\alpha^2 \Delta T^2$ es DESPRECIABLE ya que α es muy pequeño, pero que sea considerable necesito un ΔT MUY GRANDE. Finalmente:

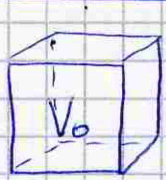
$$\boxed{S = S_o\left(1 + 2\alpha \Delta T\right)}$$



Agujero en una plancha. Al calentarla, el mismo se dilatará como si fuese un disco del material, en la misma proporción.

NOTA

- **Dilatación Volumétrica (Tridimensional):**



$$V = V_0 (1 + \alpha \Delta T)^3$$

Nuevamente, despreciando los términos cuadráticos y cúbicos:

$$\boxed{V = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T)}$$

- **Dilatación de Fluidos:**

$\boxed{V = V_0 (1 + \beta \Delta T)}$ β: coeficiente de dilatación volumétrica

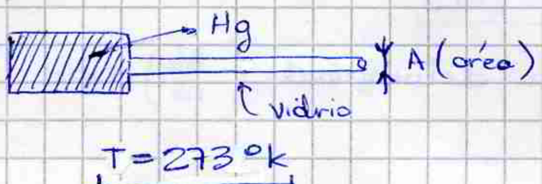
Para un material determinado $\underline{\beta = 3\alpha}$

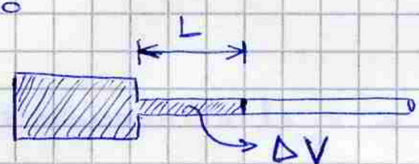
Dilatación Aparente:

Cuando se considera un fluido dentro de un recipiente, la variación del volumen del fluido que se observa es APARENTE ya que comprende la dilatación del recipiente. Entonces:

Dilatación Aparente = Dilatación del fluido − Dilatación del recipiente

Ejemplo: termómetro de mercurio





Al aumentar la temperatura

$\underline{T > T_0}$

$V_{Hg} = V(1 + \beta_{Hg} \Delta T)$

$V_{vidrio} = V(1 + 3\alpha_{vidrio} \Delta T)$

V = volumen del bulbo = $V_{Hg_0} = V_{vidrio_0}$

EL ΔV observado es el APARENTE y se corresponde con la longitud L del mercurio en el capilar:

$\Delta V = V_{Hg} - V_{vidrio} = V(\beta_{Hg} - 3\alpha_{vidrio})\Delta T$ Además $\Delta V = L \cdot A$

$$\boxed{L = \frac{V}{A}(\beta_{Hg} - 3\alpha_{vidrio})\Delta T}$$

NOTA

HOJA

FECHA

Calorimetría:

El calor es una forma de energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas. La cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de un sistema es proporcional a la variación de temperatura y a la masa de la sustancia:

$\boxed{Q = C\,m\,\Delta T}$ C: Calor Específico de la sustancia

$[C] = \frac{Joule}{kg\,°C}$ ó $[C] = \frac{cal}{g\,°C}$ Puede utilizarse °C o °k por ser un ΔT

$[Q]$ → Joule
→ Caloría ⇒ Cantidad de calor necesaria para elevar la temp de un gramo de agua en un grado centígrado

1 cal = 4,186 Joule

Cm = Capacidad térmica o calorífica de la sustancia
(Cantidad de calor necesaria para elevar en 1 grado la temp de la sustancia)

$C_{H_2O} = 1 \frac{cal}{g\,°C} = 4,186 \frac{kJ}{kg\,°C}$

La expresión real de Q es: $Q = m \int_{T_1}^{T_2} C(T)\,dT$ C NO ES CTE. $C = f(T)$

La cantidad de calor transferida CAMBIA si se realiza a presión constante o a volumen constante, estableciendo distintos valores de C para las sustancias:

$$\begin{cases} Q_P = C_P\, m\, \Delta T \\ Q_V = C_V\, m\, \Delta T \end{cases} \qquad \begin{cases} C_P: & P = cte \\ C_V: & V = cte \end{cases}$$

Sólidos y líquidos: $C_P \cong C_V$

Gases: $\boxed{C_P = C_V + nR}$

n: nº de moles

R: constante de los gases ideales.

$R = 0{,}08206 \frac{l.\,atm}{°k.\,mol}$

ó $R = 8{,}314 \frac{Joule}{°k\,mol}$

Ya que: 101,3 l.atm = 1 Joule

NOTA

El calor específico puede expresarse por unidad de moles:

$\boxed{Q = \tilde{C}\, n\, \Delta T}$ n: nº de moles

$\tilde{C}$: calor específico molar de la sustancia.

$\tilde{C} = M \cdot c$ M: Masa molar de la sustancia.

$\boxed{\tilde{C}_P = \tilde{C}_V + R}$ $(n=1)$ Relación entre los calores específicos molares a $P=$ cte y a $V=$ cte. para los GASES.

La expresión real de Q utilizando $\tilde{C}$ es: $Q = n \int_{T_1}^{T_2} \tilde{C}(T)\, dT$

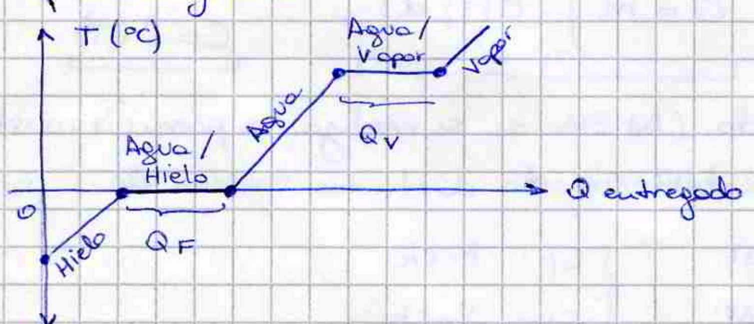
Para Gases IDEALES:

MONOATÓMICOS $\begin{cases} \tilde{C}_V = \frac{3}{2} R \\ \tilde{C}_P = \frac{5}{2} R \end{cases}$ DIATÓMICOS $\begin{cases} \tilde{C}_V = \frac{5}{2} R \\ \tilde{C}_P = \frac{7}{2} R \end{cases}$

Cambios de Fase:

Supongamos un cubito de hielo a una cierta temperatura T_1, el cual se le suministra calor. El mismo disminuirá su temperatura hasta $T_2 = 273\,°K$ (0°C) y empezará a derretirse. Hasta que no dejen de coexistir las dos fases (AGUA Y HIELO) la temperatura se mantendrá constante en 0°C. Durante todo cambio de fase, el calor entregado no modifica la temperatura del sistema.

Esquematizando:



Fusión:

$\boxed{Q = l_F \cdot m}$ m: masa

l_F: calor latente de fusión

Vaporización:

$\boxed{Q = l_V \cdot m}$

l_V: calor latente de vaporización

Para el agua: $l_F = 333{,}5 \ \frac{kJ}{kg}$

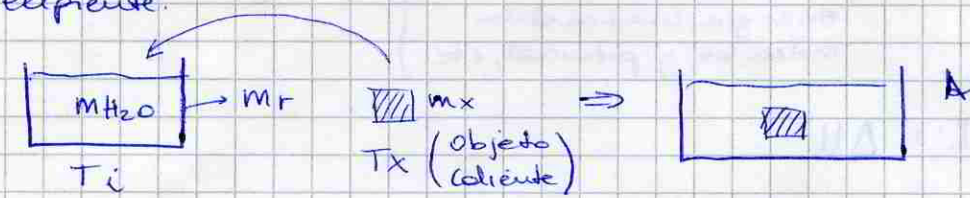
$l_V = 2235 \ \frac{kJ}{kg}$

HOJA
FECHA

Calorímetro:

Es un dispositivo que permite medir el calor específico de un objeto. Consta de un recipiente con agua a una cierta temperatura T_i, y de una masa m_{H_2O}. El recipiente tiene una cierta masa m_r y calor específico C_r. Se coloca en el mismo un objeto de masa m_x y temperatura T_x.

Si el dispositivo se encuentra aislado térmicamente del medio exterior, el calor que sale del cuerpo debe ser igual al que ingresa al agua y al recipiente.



$$|Q\ \text{entregado}| = |Q\ \text{recibido}| \qquad \boxed{\sum Q = 0}$$

(Uno será positivo y el otro negativo)

Entonces:

$$C_x\, m_x \underbrace{(T_f - T_x)}_{<0} + C_{H_2O}\, m_{H_2O} \underbrace{(T_f - T_i)}_{>0} + C_r\, m_r \underbrace{(T_f - T_i)}_{>0} = 0$$

Primera ley de la Termodinámica:

Históricamente:

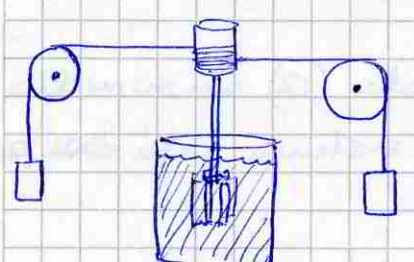
- Dinámica: F (Fuerza), P (potencia), W (trabajo)
- Termodinámica: T (temp), Q (calor)

W y Q: 2 formas distintas de energía

$[W] = \text{Joule}$

$[Q] = \text{Calorías}$

La temperatura de un sistema puede elevarse entregándole calor, pero también puede lograrse realizando sobre él:



Dejando caer los pesos un cierto Δh, el trabajo realizado por la fuerza peso elevará la temperatura del agua, siendo equivalente a entregarle una cierta cantidad de calor Q.

De aquí se obtiene la relación:

$$1\ \text{cal} = 4{,}186\ \text{Joule}$$

NOTA

Expresión de la Energía Total de un sistema:

$$E_T = \sum k + \sum U + U$$

k: Energía Cinética → Rotacional, traslacional

U: Energía Potencial → Gravitatoria, Elástica, Eléctrica, Magnética

} Energías Macroscópicas

U: Energía Interna → Unión entre moléculas, Unión entre átomos, energía cinética de las moléculas y potencial, etc

} Energías Microscópicas

$$\Delta E_T = \Delta k + \Delta U + \Delta U$$

Estudiaremos los casos donde $\Delta k = 0$, $\Delta U = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta E_T = \Delta U$

De la misma forma que el trabajo es el intercambio de energía entre un sistema (cuerpo) y su medio exterior (fuerza), el calor es el intercambio de energía debido única y exclusivamente a la diferencia de temperatura entre el sistema y el medio exterior.

Por ello, los sistemas NO TIENEN TRABAJO o CALOR, sino tienen energía cinética o temperatura.

La temperatura es una magnitud MACROSCÓPICA que se corresponde con la energía cinética promedio de las moléculas que constituyen el sistema (magnitud MICROSCÓPICA).

El calor en sí es el proceso de intercambio de cantidades de movimiento en las colisiones entre las moléculas que adquieren mayor velocidad y aumentan la temperatura del sistema.

Primera ley de la Termodinámica:

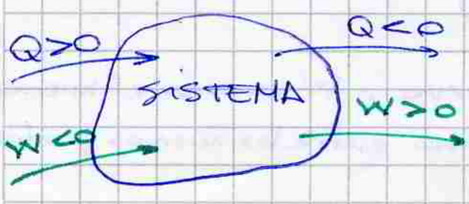
Si un sistema intercambia trabajo (W) y Calor (Q) con su medio exterior, el cambio en la energía total del sistema está dada por:

$$\boxed{\Delta U = Q - W}$$

NOTA

HOJA
FECHA

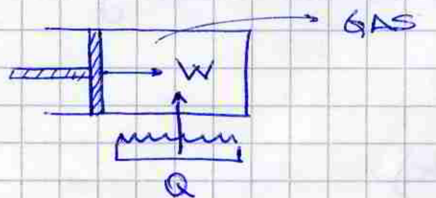
Convención de signos:



la máquina recibe calor y realiza trabajo (CONVENCIÓN POSITIVA).

Cuestiones importantes de la 1ª ley:

1) La forma de intercambiar energía con el sistema es a través de trabajo mecánico W o a través de Q.



Si el pistón comprime el gas y sale calor al medio exterior: $W<0$ y $Q<0$

Si ingresa calor del medio exterior y el gas expansiona al pistón: $W>0$ y $Q>0$

2) Expresiones para W y Q:

A (área del pistón)

$$W = \int F\,dx = \int \underbrace{\frac{F}{A}}_{P} \underbrace{A\,dx}_{dV} \Rightarrow \boxed{W = \int P\,dV}$$

P: presión
dV: diferencial de volumen.

(De aquí sale la unidad de W en l.atm)

Q $\xrightarrow{\text{sin cambio de FASE}}$ MASA $\xrightarrow{V=cte}$ $Q_v = m\int C_v\,dT$

MASA $\xrightarrow{P=cte}$ $Q_p = m\int C_p\,dT$

sin cambio de FASE → MOLES $\xrightarrow{V=cte}$ $Q_v = n\int \tilde{C}_v\,dT$

MOLES $\xrightarrow{P=cte}$ $Q_p = n\int \tilde{C}_p\,dT$

Q $\xrightarrow{\text{con cambio de FASE}}$ $Q = m\,l$

3) Q NO ES FUNCIÓN DE ESTADO

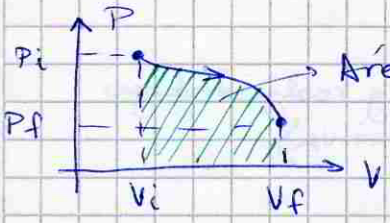
Su valor no depende únicamente de los estados inicial y final, sino también del proceso que llevó al sistema de un estado a otro.

Q no es el mismo si el proceso se realizó a V=cte, o a P=cte.

NOTA

4) W NO ES FUNCIÓN DE ESTADO

También depende de cómo se realizó el proceso:



→ Área bajo la curva $= \int P\,dV = W$

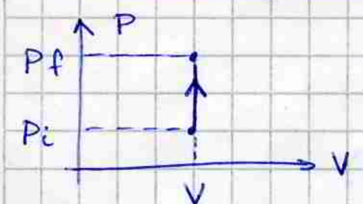
Por ser el área bajo la curva, W no será el mismo para 2 trayectorias distintas entre los mismos puntos.

5) ΔU ES FUNCIÓN DE ESTADO

ΔU NO DEPENDE DEL PROCESO sino que DEPENDE SOLAMENTE DE LOS ESTADOS INICIAL Y FINAL. Si puedo calcularlo para un proceso me servirá para cualquier otro que se realice entre los mismos estados inicial y final.

Distintos tipos de Procesos:

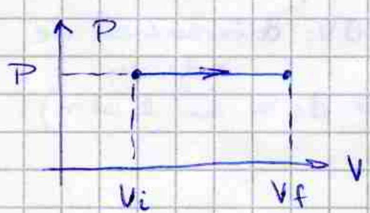
• **Procesos Isocoros o Isométricos:** $(V = cte)$



$W = \int P\,dV = 0$ (No varía el volumen)

$\Delta U = Q_V$

• **Procesos Isobáricos:** $(P = cte)$



$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = P(V_f - V_i)$

$W = P_f V_f - P_i V_i = nRT_f - nRT_i = nR(T_f - T_i)$

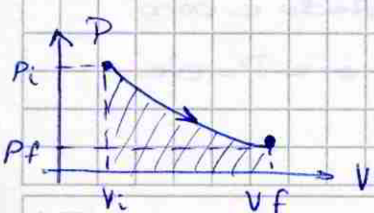
$Q = Q_P$

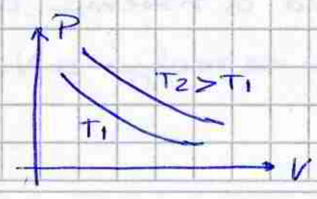
• **Procesos Isotérmicos:** $(T = cte)$

Para un gas IDEAL, la energía interna es función de la energía cinética traslacional promedio de las moléculas (temperatura).

$U = f(T) \Rightarrow$ Como $T = cte \Rightarrow \Delta U = 0$

$Q = W \qquad W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = W = Q$





A mayor temperatura se eleva la curva

NOTA

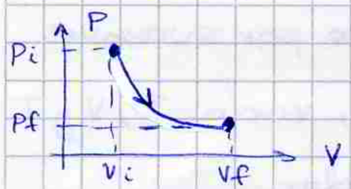
Autor: Ing. Daniel Palombo

- **Procesos Adiabáticos:** $(Q=0)$

No hay intercambio de calor entre el sistema y el medio exterior

$Q=0$, $\Delta U = -W$

Puede demostrarse: $W = \dfrac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1}$ donde $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{\tilde{C}_P}{\tilde{C}_V}$



$\gamma_{\text{monoatómico}} = \frac{5}{3}$

$\gamma_{\text{diatómico}} = \frac{7}{5}$

Energía Interna de un gas IDEAL:

SIEMPRE, para cualquier tipo de proceso se cumple:

$$\boxed{\Delta U = \tilde{C}_V\, n\, \Delta T}$$

Para gases ideales también se cumple: $\boxed{PV = nRT}$

Resumen de Fórmulas:

PROCESO	ECUACIÓN	Q	ΔU	W
$P = cte$	$\frac{V}{T} = cte$ (Gay Lussac)	$\tilde{C}_P\, n\, \Delta T$	$\tilde{C}_V\, n\, \Delta T$	$P(V_f - V_i)$ ó $nR(T_f - T_i)$
$V = cte$	$\frac{P}{T} = cte$ (Gay Lussac)	$\tilde{C}_V\, n\, \Delta T$	$\tilde{C}_V\, n\, \Delta T$	0
$T = cte$	$PV = cte$ (Boyle-Mariotte)	$nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	0	$nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
$Q = 0$	$PV^{\gamma} = cte$ $TV^{\gamma - 1} = cte$ $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte$	0	$\tilde{C}_V\, n\, \Delta T$	$\frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1}$

En un CICLO CERRADO (Circuito):

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta U = 0 \\ W = Q\end{array}}$$

NOTA

Segunda ley de la Termodinámica:

Fuente Térmica: Es un sistema que, a pesar de entregarle o quitarle calor, mantiene su temperatura CONSTANTE. Su capacidad calorífica es INFINITA.

$C = \frac{Q}{m \Delta T}$ A pesar que $Q \neq 0$, $T = cte \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow C \to \infty$

Proceso Cuasi-Estático:

Es un proceso en el cual se pasa de un estado a otro por sucesivos estados de equilibrio infinitesimales, no violentos, varía P, V y T pero en todo punto del sistema tienen el mismo valor.

Procesos Reversibles:

Un proceso es reversible cuando puede regresar al sistema al estado inicial por medio de procesos cuasiestáticos. Para ello:

- No debe realizarse trabajo por rozamiento u otras fuerzas que producen calor.
- La conducción de calor sólo puede ocurrir isotérmicamente
- El proceso debe ser cuasiestático

Esto es imposible en la práctica, pero puede aproximarse mucho un proceso a la reversibilidad.

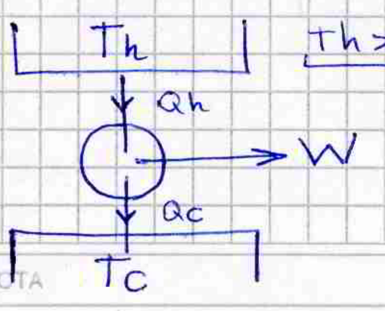
Máquinas Térmicas:

Son dispositivos cíclicos que extraen calor de una fuente térmica caliente (Th) y transforman parte de ese calor en trabajo mecánico. El calor restante es enviado a una fuente térmica fría (Tc)

- **Segunda ley de la Termodinámica: Enunciado de Kelvin**

No existe la máquina térmica perfecta que extraiga calor de un sistema y lo convierta totalmente en trabajo mecánico, sin producir cambios en el sistema o en el medio exterior.

Rendimiento ($\mathcal{E}$):



$Th > Tc$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{|W|}{|Qh|}}$$

$$\underbrace{|Qh|}_{\text{energía que entra}} = \underbrace{|Qc| + |W|}_{\text{energía que sale}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{|Qh| - |Qc|}{|Qh|} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = 1 - \frac{|Qc|}{|Qh|}}$$

NOTA

Si $|Q_c| = 0 \Rightarrow |Q_h| = |W|$ Máquina IDEAL (no existe)

$\underline{\varepsilon = 1}$

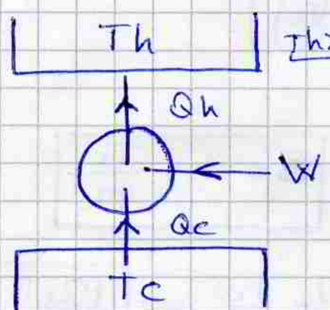
Máquinas Frigoríficas:

Son dispositivos cíclicos sobre el cual se realiza trabajo mecánico para extraer calor de una fuente térmica fría (T_c) y transferirlo a otra fuente térmica caliente (T_h)

• **Segunda ley de la Termodinámica: Enunciado de Clausius**

No existe la máquina frigorífica perfecta que transfiera calor de un objeto frío a otro caliente sin producir otro efecto.

Eficiencia (η):



$\underline{T_h > T_c}$

$$\boxed{\eta = \frac{|Q_c|}{|W|}}$$

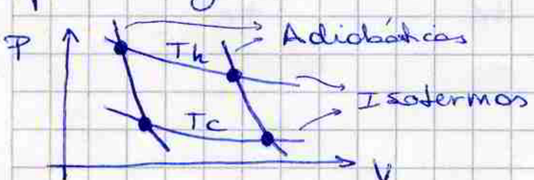
$$\underbrace{|Q_h|}_{\text{energía que sale}} = \underbrace{|Q_c| + |W|}_{\text{energía que entra.}}$$

$$\eta = \frac{|Q_c|}{|Q_h| - |Q_c|} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{\frac{|Q_h|}{|Q_c|} - 1}}$$

Si $|Q_c| = |Q_h| \Rightarrow \underline{\eta \to \infty}$ Máquina IDEAL (no existe)

Máquina de Carnot:

Sabiendo que no existe la máquina térmica o frigorífica ideal, la máquina real con mayor "ε" o "η" que existe es una máquina REVERSIBLE, que realiza el ciclo DE CARNOT:



Ciclo en sentido HORARIO: $W_{NETO} > 0$

Ciclo en sentido ANTIHORARIO: $W_{NETO} < 0$

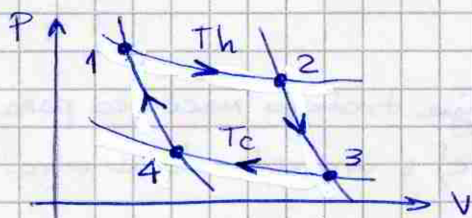
El teorema de Carnot establece:

• Todas las máquinas térmicas que realicen el ciclo de Carnot y sean reversibles, que operen con el mismo par de fuentes térmicas tienen el mismo "ε" o "η".

NOTA

- El "ε" o "η" de una máquina irreversible es SIEMPRE MENOR que el de una máquina reversible de Carnot que trabaje con las mismas fuentes.

Rendimiento de una Máquina Térmica de Carnot:



$\underline{W>0}$ (Máquina térmica)

$$\varepsilon = \frac{|W|}{|Q_{ingresado}|}$$

$Q_{23} = Q_{41} = 0$ $\quad Q_h = Q_{12}$ $\quad Q_c = Q_{34}$ $\Rightarrow$ $\underline{\varepsilon = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}}$

$$|W_{12}| = nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$|W_{34}| = |W_{43}| = nRT_c \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$$

$\Delta U_{12} = 0 \Rightarrow Q_{12} = W_{12}$

$\Delta U_{34} = 0 \Rightarrow Q_{34} = W_{34}$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\left|\cancel{nR}\, T_c \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)\right|}{\left|\cancel{nR}\, T_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right|}$$

En los adiabáticos:

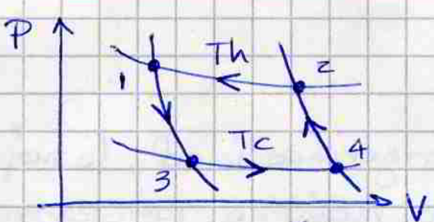
$T_h V_2^{\gamma-1} = T_c V_3^{\gamma-1}$

$T_c V_4^{\gamma-1} = T_h V_1^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \underline{\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon = 1 - \frac{T_c}{T_h}}$$

En una máquina térmica de Carnot: $1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \Rightarrow \boxed{\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h}}$

Eficiencia de una Máquina Frigorífica de Carnot:



$\underline{W<0}$ (Máquina Frigorífica)

La relación $\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h}$ se cumple al igual que en la máquina térmica de Carnot

$$\eta = \frac{1}{\frac{|Q_h|}{|Q_c|} - 1} = \frac{1}{\frac{T_h}{T_c} - 1} = \frac{1}{\frac{T_h - T_c}{T_c}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{T_c}{T_h - T_c}}$$

NOTA