



Lanzamiento Proyectil

Ejercicio 8 – Cinemática y Dinámica de la partícula

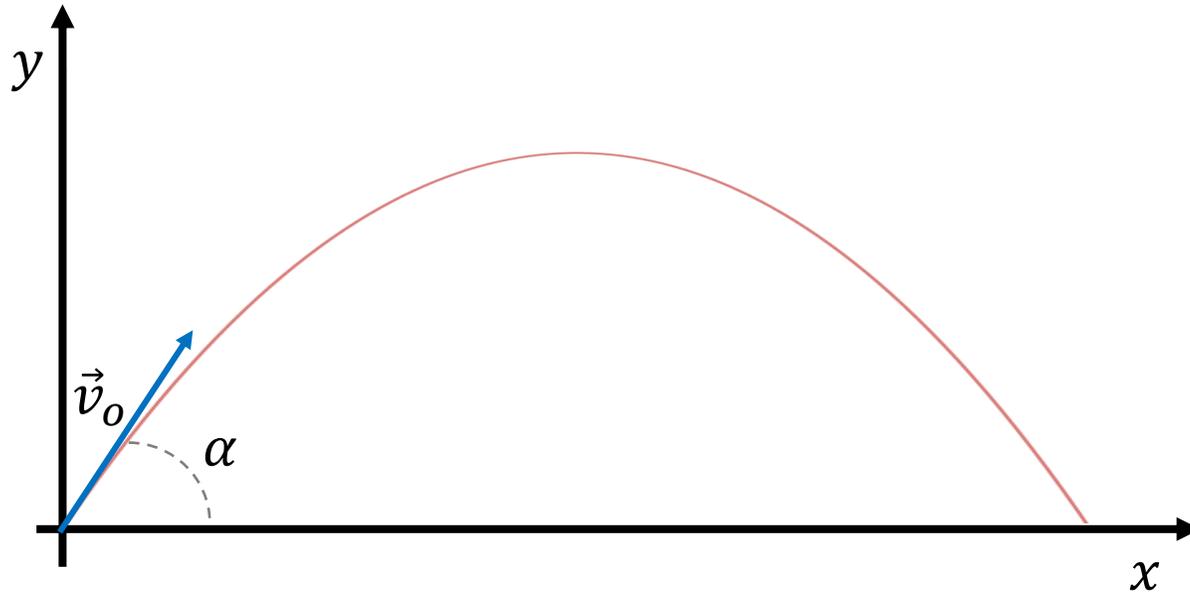
Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

- Hallar la expresión del radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria.
- Calcular dicho radio para los datos: $\alpha = 30^\circ$ y $v_0 = 10 \text{ m/s}$.
- Con los datos (b), calcular el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, y comprobar que dichos radios son iguales.

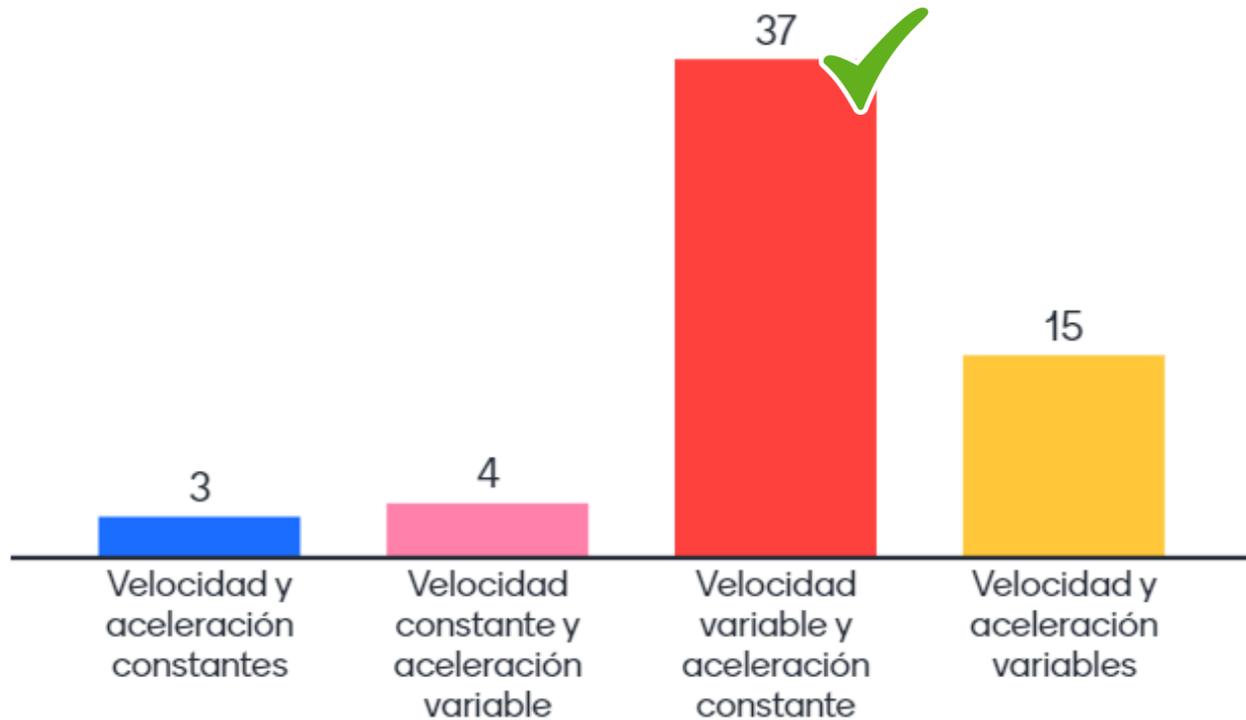
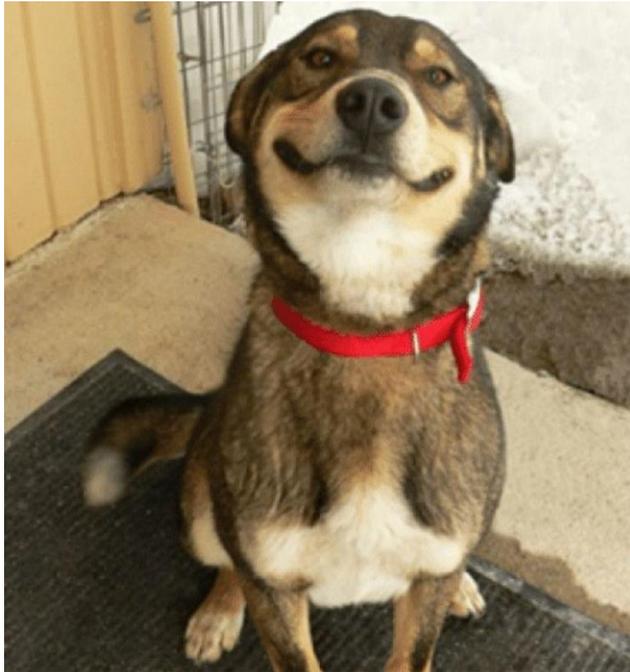
Análisis del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

a) Hallar la expresión del radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria.



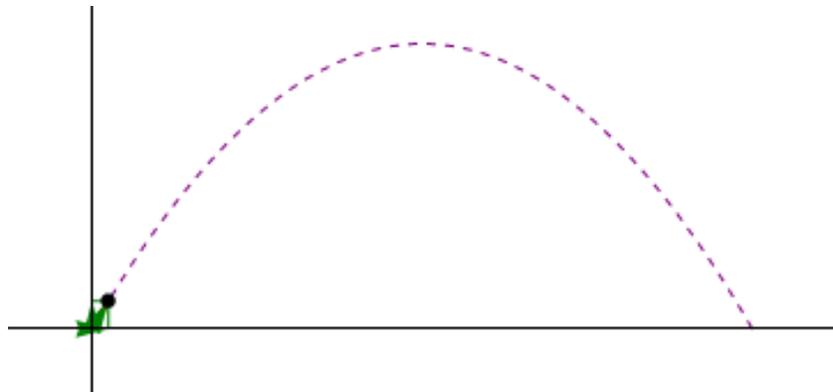
¿Qué tipo de movimiento describe?



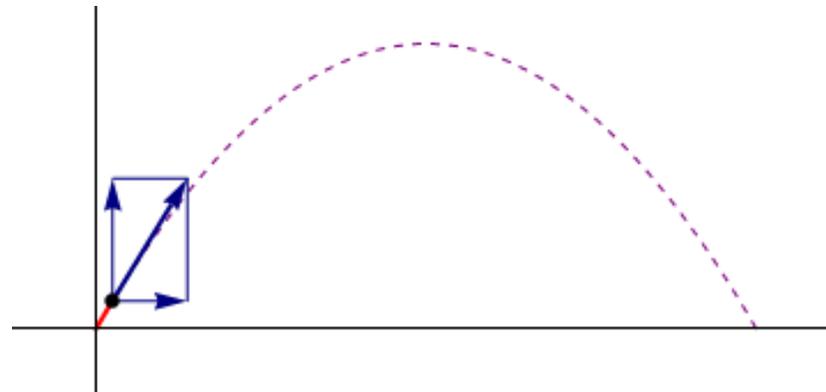
Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

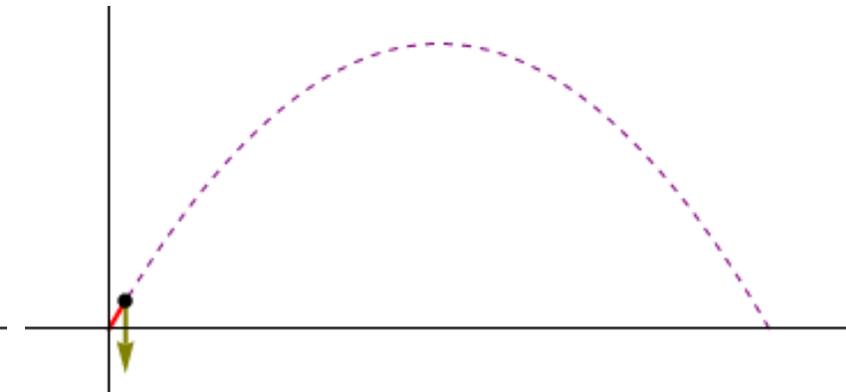
a) Hallar la expresión del radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria.



Posición \vec{r}



Velocidad \vec{v}



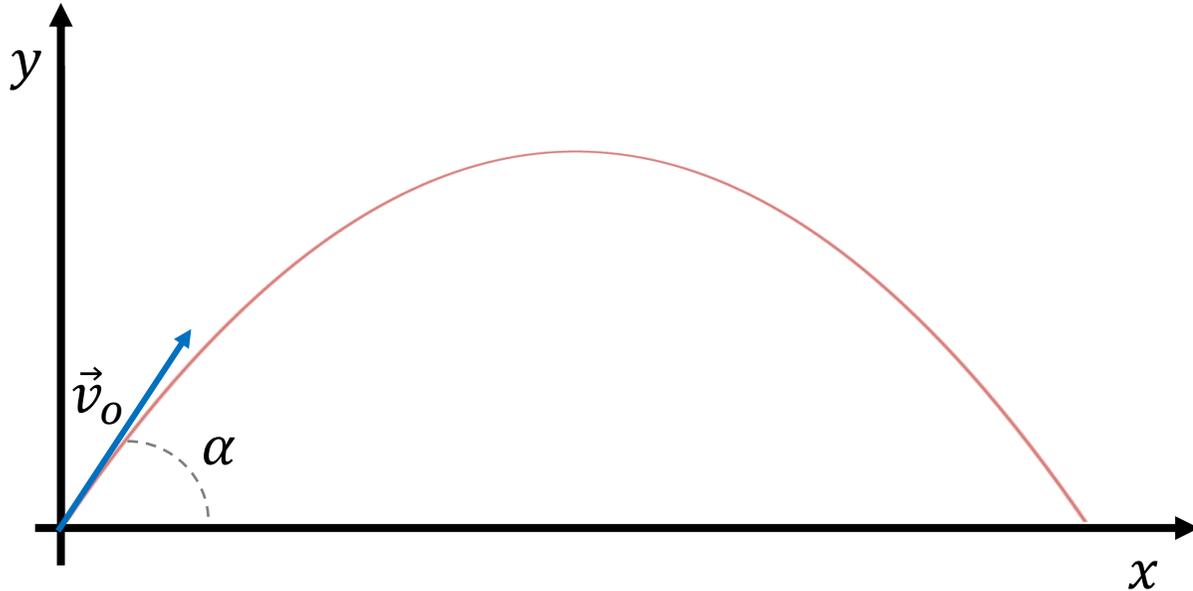
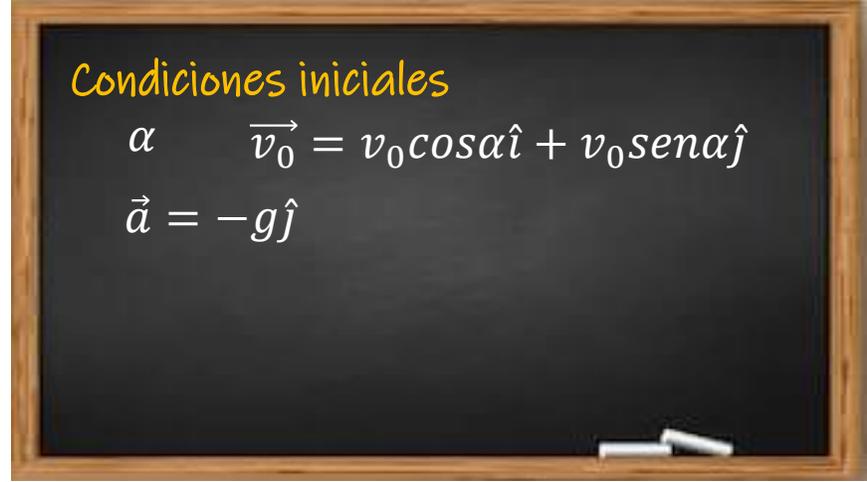
Aceleración \vec{a}
Constante



Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

a) Hallar la expresión del radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria.



Movimiento con aceleración $\vec{a} = -g\hat{j}$

$$d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) \cdot dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\hat{j}$$

$$\vec{v}_0 = \underbrace{v_0 \cos \alpha \hat{i} + v_0 \sin \alpha \hat{j}}$$

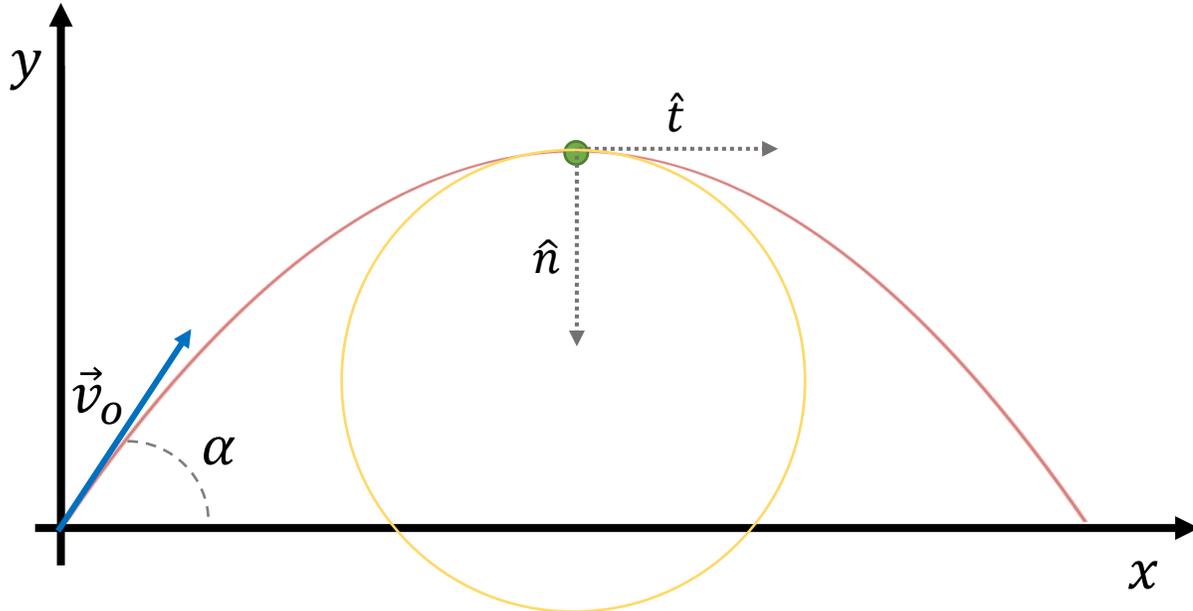
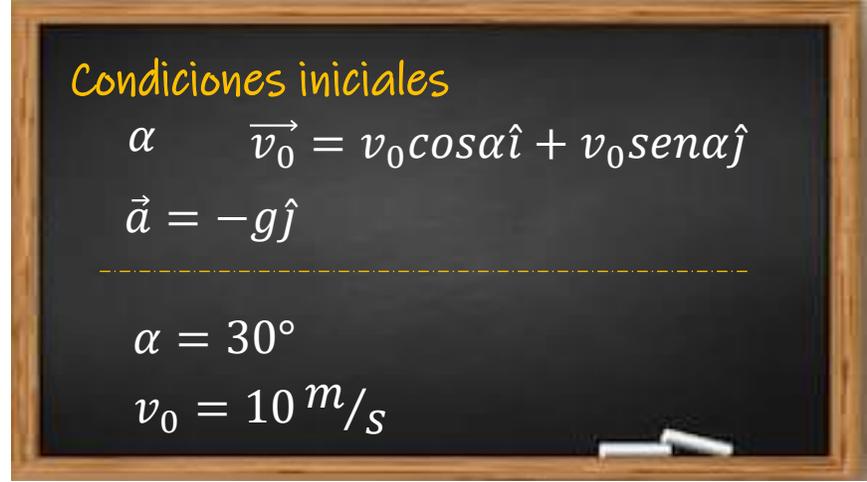
Constante



Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

a) Hallar la expresión del radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria.



$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = a_{max} = g$$

↓

$$\rho = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g}$$

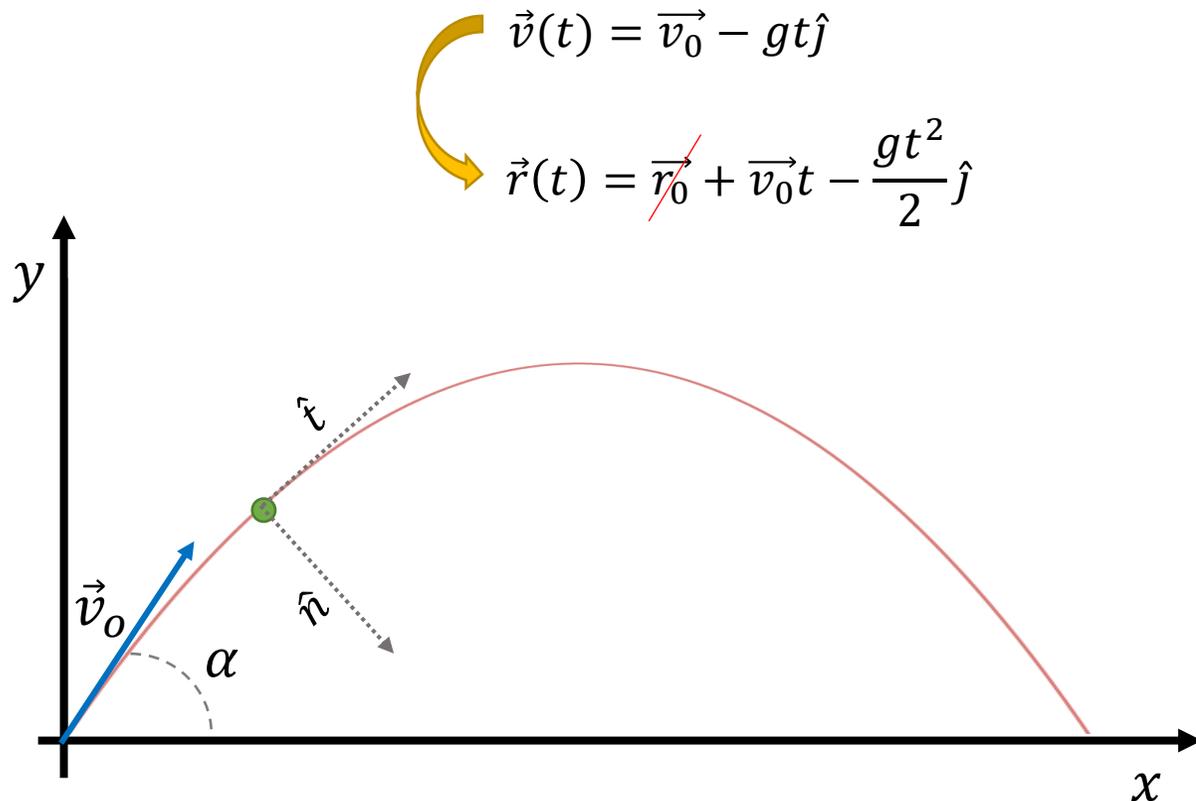
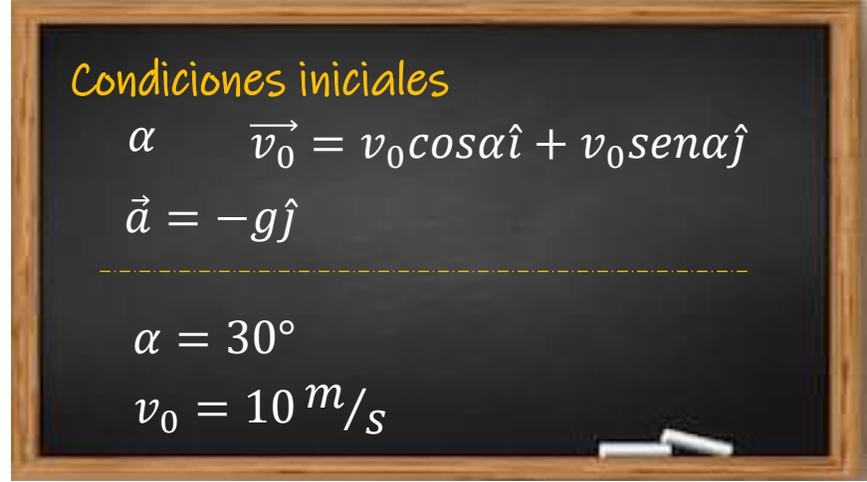
b) Calcular dicho radio para los datos: $\alpha = 30^\circ$ y $v_0 = 10 \text{ m/s}$.

$$\rho = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g} = 7,5 \text{ m}$$

Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

c) Con los datos (b), calcular el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, y comprobar que dichos radios son iguales.



En la altura máxima

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

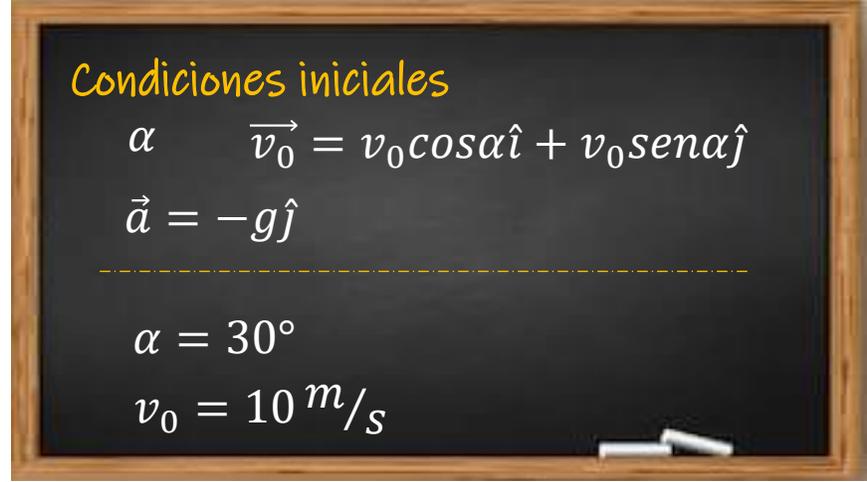
$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$y_{med} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g} = 0,63 \text{ m}$$

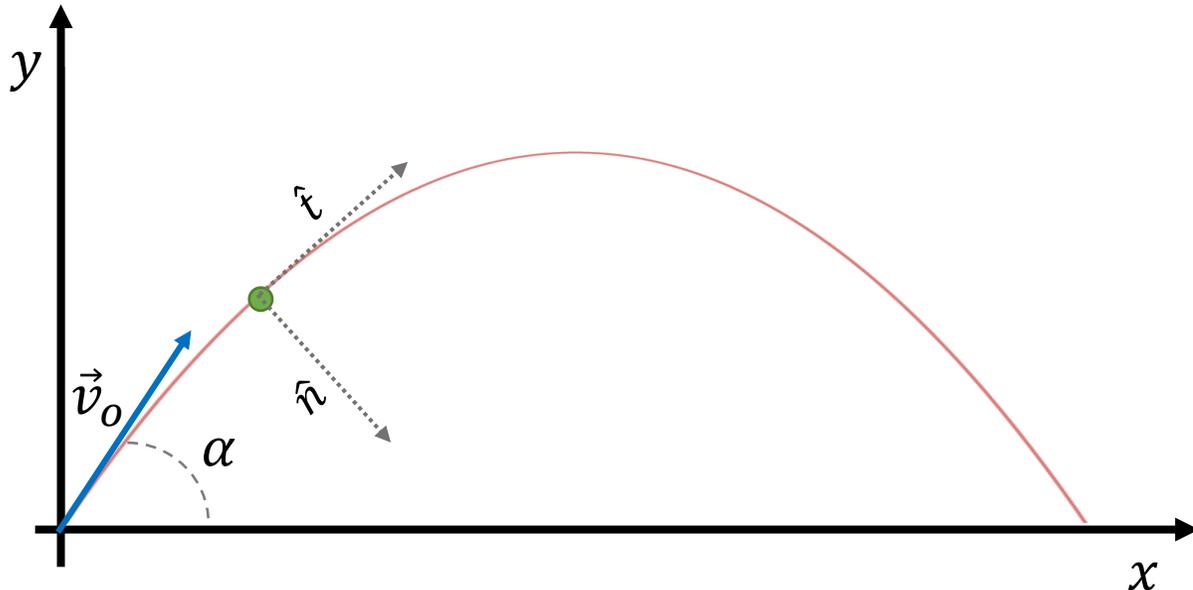
Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

c) Con los datos (b), calcular el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, y comprobar que dichos radios son iguales.



Tiempo al que alcanza la mitad de altura $y_{med} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g} = 0,63 \text{ m}$



$$y_{med} = v_0 \sin \alpha \cdot t_{med} - \frac{g t_{med}^2}{2}$$

$$-5 t_{med}^2 + 5 t_{med} - 0,63 = 0$$

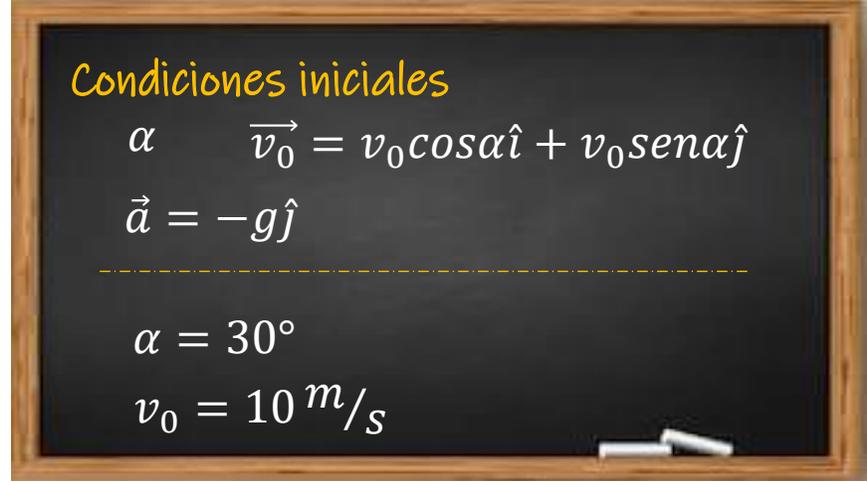
Resumiendo unidades

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t = 0,148 \text{ s} \rightarrow \text{subida} \\ t = 0,853 \text{ s} \rightarrow \text{bajada} \end{cases}$$

Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

c) Con los datos (b), calcular el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, y comprobar que dichos radios son iguales.



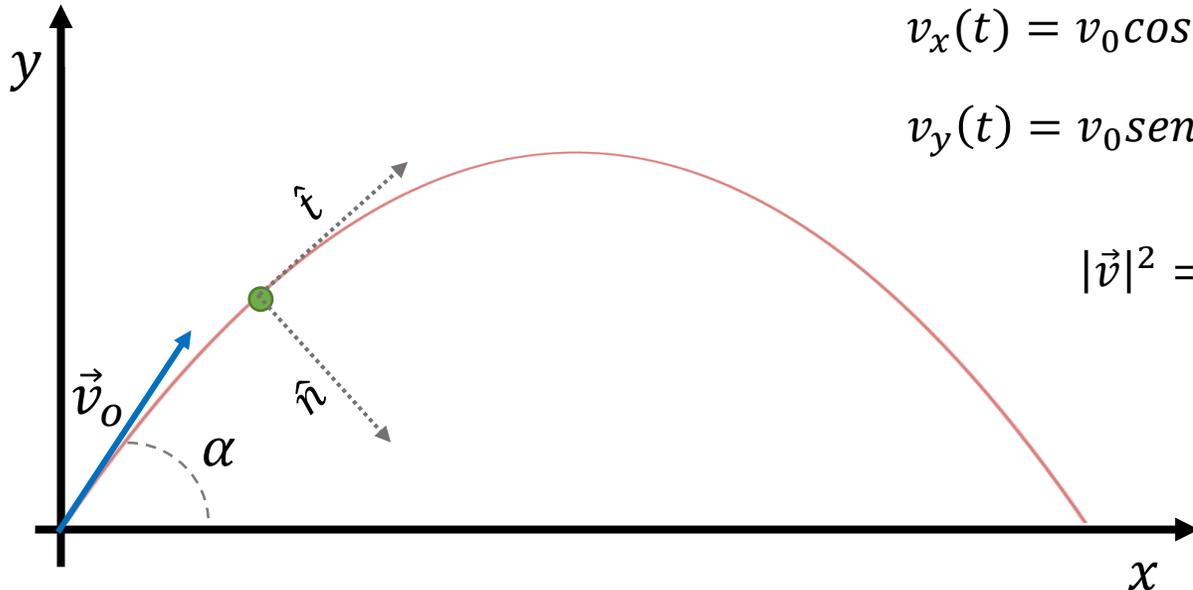
Las componentes de la velocidad a $t = 0,148 \text{ s}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{j}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha = 8,7 \text{ m/s}$$

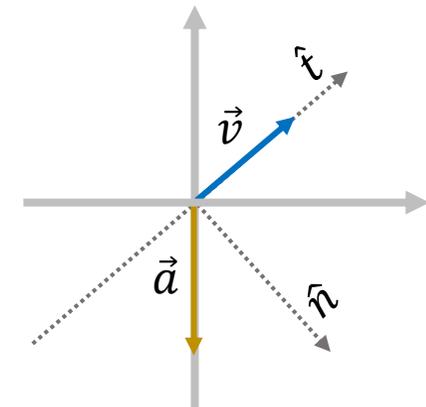
$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt = 3,5 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}|^2 = 87,9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$



Versor tangente

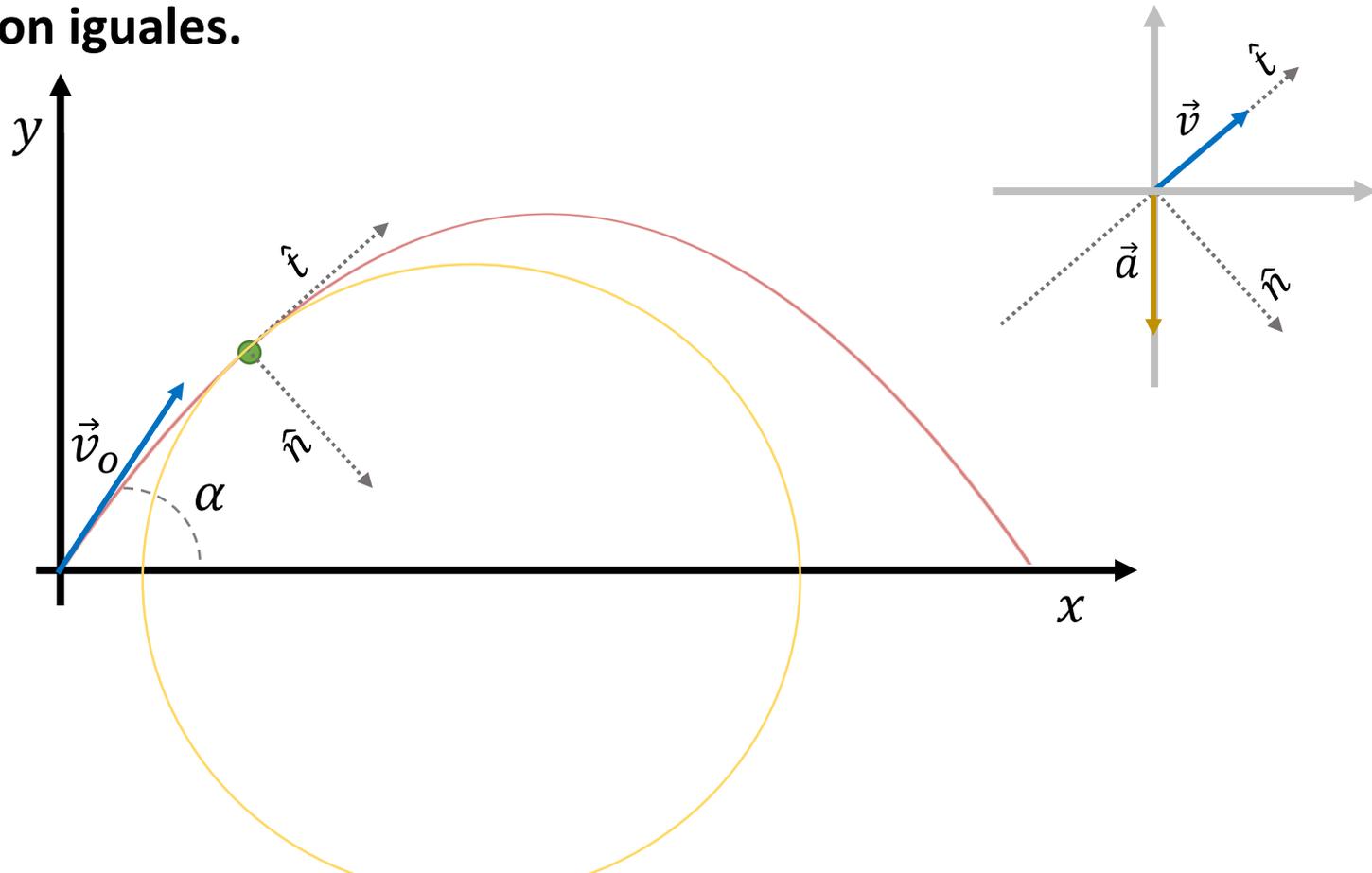
$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 0,93 \hat{i} + 0,37 \hat{j}$$



Desarrollo del problema

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

c) Con los datos (b), calcular el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, y comprobar que dichos radios son iguales.



Condiciones iniciales

$$\alpha \quad \vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{i} + v_0 \sin \alpha \hat{j}$$

$$\vec{a} = -g \hat{j}$$

$$\alpha = 30^\circ \quad |\vec{v}_{med}|^2 = 87,9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \quad \theta = 66^\circ$$

$$a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$$

\hat{i}	\hat{j}	\hat{k}
$v_0 \cos \alpha$	$v_0 \sin \alpha - gt$	0
0	g	0

$$a_n = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot g}{|\vec{v}|} = 9,2 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n} = 9,5 \text{ m}$$

Un proyectil es disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal (en el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical y hacia abajo).

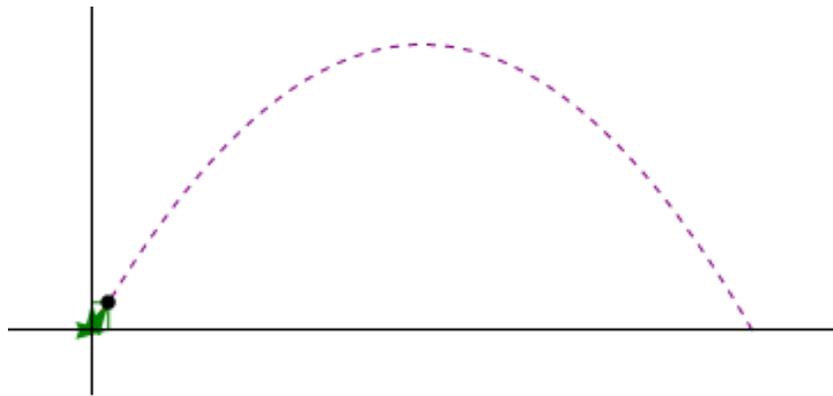


<https://www.menti.com/ifyngetar3>

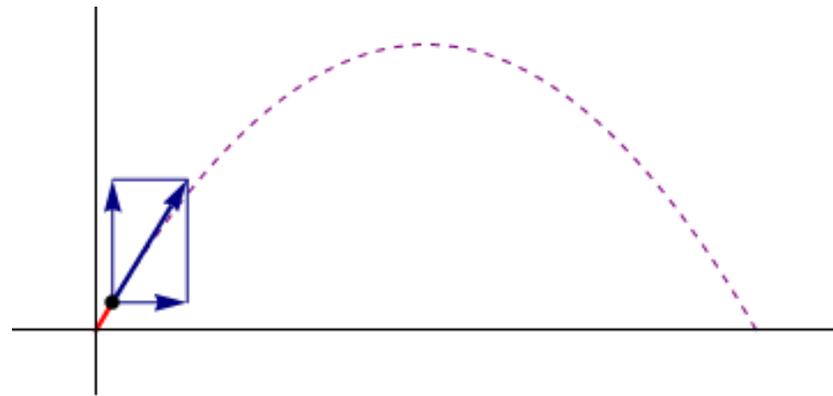
Condiciones iniciales

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{i} + v_0 \sin \alpha \hat{j}$$
$$\vec{a} = -g \hat{j}$$

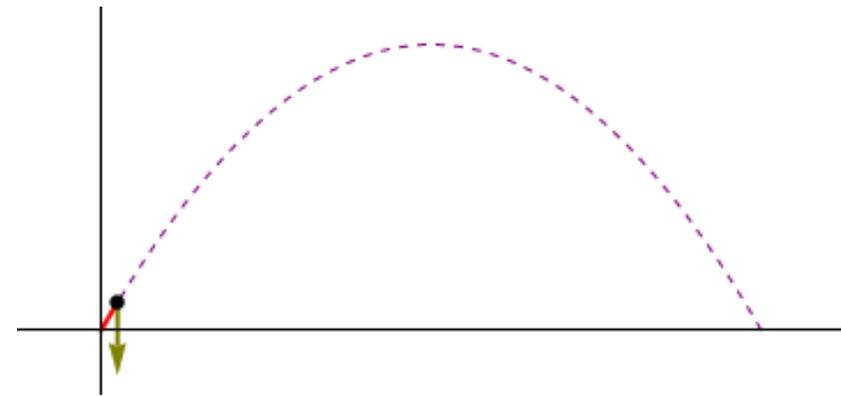
$\alpha = 30^\circ$
 $v_0 = 10 \text{ m/s}$ $\theta = 66^\circ$



Posición \vec{r}



Velocidad \vec{v}



Aceleración \vec{a}

Verdadero o falso

