FIUBA – Física I – Turno 4 **Parcial B** **2c 2017**

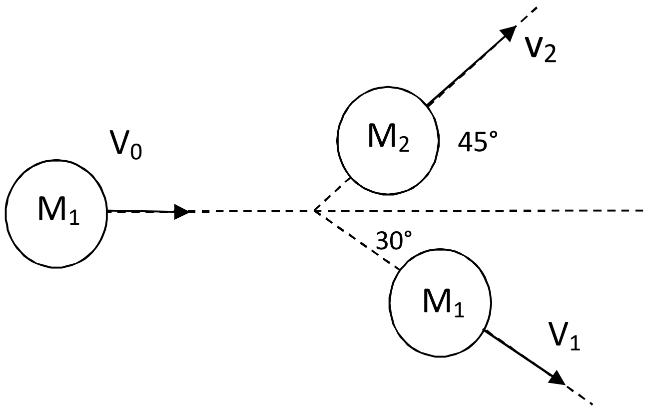
Apellido	Nombre	Padrón	Hojas entregadas	Nota

IMPORTANTE: Resolver cada problema en HOJAS SEPARADAS. Identificar con nombre y apellido cada hoja. Numerar las hojas que entrega. El examen se resuelve en tinta. No usar color rojo. Justificar los resultados obtenidos con procedimientos físico matemáticos lícitos, y con ecuaciones y leyes de la física. Indicar claramente los sistemas de referencia elegidos.

MOMENTOS DE INERCIA BARICÉNTRICOS: $I_{CM-ARO}=MR^2$; $I_{CM-CILINDRO}=MR^2/2$; $I_{CM-ESFERA\ MACIZA}=2MR^2/5$; $I_{CM-ESFERA\ HUECA}=2MR^2/3$; $I_{CM-BARRA}=ML^2/12$

1) Dos partículas están apoyadas sobre una superficie horizontal con rozamiento despreciable. Inicialmente la masa M_1=1kg tiene una rapidez de 2,5m/s. Después que golpea a la M_2=2kg, las masas se mueven según indica la figura.

a) Calcular la velocidad de ambas masas después del choque.
b) Determinar el impulso de la fuerza resultante sobre M_2 durante el choque.
c) Calcular la variación de energía cinética durante el choque. Clasificar el choque.

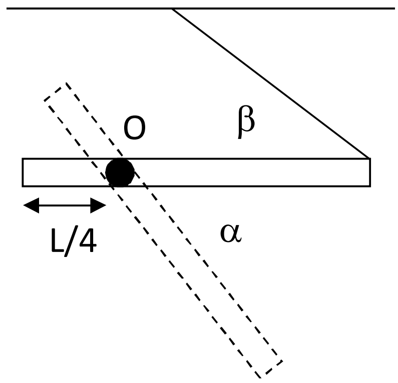


2) Una barra de masa M y longitud L está sujeta a un eje fijo "O". Inicialmente está en equilibrio, en posición horizontal, y sostenida por un cable. Expresar, en función de los datos del problema:

a) La fuerza que ejerce el cable sobre la barra.

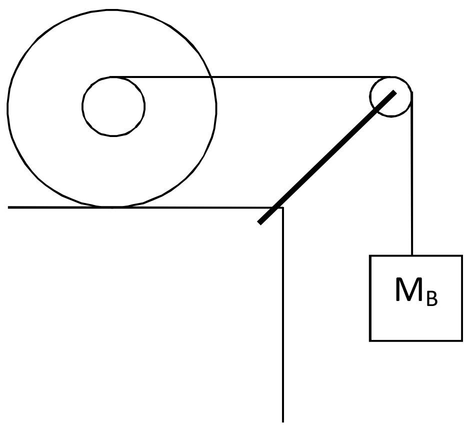
Cuando se corta la soga, la barra cae girando sobre el eje "O":

b) Velocidad angular de la barra cuando ésta forma un ángulo α con la horizontal.
c) Aceleración angular y la del centro de masa de la barra cuando ésta forma un ángulo α con la horizontal.

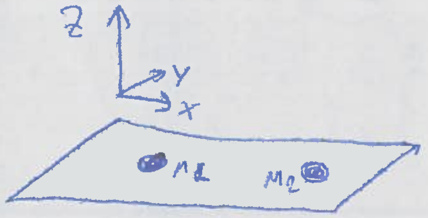


3) Un bloque (M_B=m) está unido a un disco (M_D=4m y radio R_D=3r) por una soga ideal que está enrollada a una distancia r del centro del disco y pasa por una polea ideal. Considerando un rozamiento tal que el disco rueda sin deslizar:

a) Hacer el DCL del disco y del bloque. Escribir las ecuaciones de movimiento y los vínculos.
b) Calcular la aceleración angular del disco.
c) Calcular la velocidad angular del disco cuando M_B bajó una distancia d.



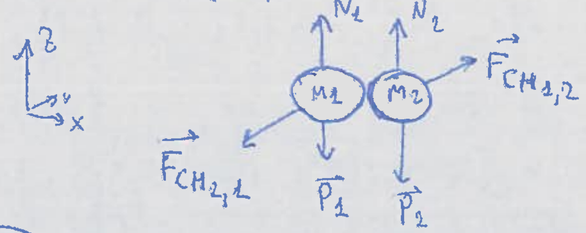
(1)



$M_1 = 1\,Kg$ $\qquad M_2 = 2\,Kg$

$|\vec{V}_{10}| = 2{,}5\,\frac{m}{s}$

(a). Durante el choque:



• m1) $z: N_1 - P_1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x: -F_{CH_{2,1}x} = m_1 a_{1x} \\ y: -F_{CH_{2,1}y} = m_1 a_{1y} \end{array}\right\}$ (NO ES NECESARIO)

m2) $z: N_2 - P_2 = 0$

$\left\{\begin{array}{l} x: F_{CH_{1,2}x} = m_2 a_{2x} \\ y: F_{CH_{1,2}y} = m_2 \cdot a_{2y} \end{array}\right.$

• Veo si se conserva la $\vec{P}_{sistema}$:

• $\vec{F}_{ext}: \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2$; $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$\Rightarrow$ Durante el choque: $\sum \vec{F}_{ext_{sistema}} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{P}_{sist}$ se conserva

$\Rightarrow$ $\vec{P}_0 = \vec{P}_F$

$$m_1\vec{V}_{1_0} + m_2\underbrace{\vec{V}_{20}}_{=0} = m_1\vec{V}_{1F} + m_2\vec{V}_{2F}$$

$$m_1 V_{10_x}\,\check{i} = m_1 V_1 . \cos 30°\,\check{i} - m_1 V_1 \operatorname{sen} 30°\,\check{j} + m_2 V_2 \cos 45°\,\check{i} + m_2 V_2 \operatorname{sen} 45°$$

• Igualo en x:

$$\boxed{m_1 V_{10_x} = m_1 V_1 \cos 30° + m_2 V_2 \cos 45°} \quad ①$$

• Igualo en y:

$$0 = -m_1 V_1 \operatorname{sen} 30° + m_2 V_2 \operatorname{sen} 45°$$

$$m_1 V_1 \operatorname{sen} 30° = m_2 V_2 \operatorname{sen} 45°$$

$$\boxed{V_1 = \frac{m_2 V_2 \operatorname{sen} 45°}{m_1 \operatorname{sen} 30°}} \quad ②$$

• Reemplazo ② en ① y despejo V_2:

$$m_1 V_{10_x} = \cancel{m_1} . \left[\frac{m_2 V_2 \operatorname{sen} 45°}{\cancel{m_1} \operatorname{sen} 30°}\right] . \cos 30° + m_2 V_2 \cos 45°$$

$$m_1 V_{10_x} = V_2 . \left[m_2 . \frac{\operatorname{sen} 45° . \cos 30°}{\operatorname{sen} 30°} + m_2 \cos 45°\right]$$

$$\frac{m_1 . V_{1_{0x}}}{m_2 . \frac{\operatorname{sen}45° . \cos 30°}{\operatorname{sen}30°} + m_1 \cos 45°} = V_2$$

$$\frac{1\,kg . 2,5\,\frac{m}{s}}{2\,kg . \frac{0,707 . 0,866}{0,5} + 2\,kg . 0,707} = V_2$$

$$\Rightarrow V_2 = 0,65\,\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{V_2} = V_2 \cos 45°\,\check{i} + V_2 \operatorname{sen} 45°\,\check{j}$$

$$\boxed{\vec{V_2} = 0,46\,\frac{m}{s}\,\check{i} + 0,46\,\frac{m}{s}\,\check{j}}$$

. Reemplazo V_2 en (2):

$$V_1 = \frac{m_2\, V_2 . \operatorname{sen} 45°}{m_1 \operatorname{sen} 30°}$$

$$V_1 = \frac{2\,kg . 0,65\,\frac{m}{s} . 0,707}{1\,kg . 0,5}$$

$$V_1 = 1,84\,\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{V_1} = 1,84\,\frac{m}{s} . \cos 30°\,\check{i} - 1,84\,\frac{m}{s} \operatorname{sen} 30°\,\check{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_1} = 1,59\,\frac{m}{s}\,\check{i} - 0,92\,\frac{m}{s}\,\check{j}}$$

(b) $$\vec{I_2} = \int \vec{F}_{\text{TOTAL SOBRE 2}} . dt = \Delta \vec{P_2} = \vec{P}_{2f} - \vec{P}_{2_0}$$

$$= m_2 \vec{V}_{2f} - m_2 \underbrace{\vec{V}_{2_0}}_{=0}$$

$$= m_2 . \left[0,46\,\frac{m}{s}\,\check{i} + 0,46\,\frac{m}{s}\,\check{j}\right]$$

$$\boxed{\vec{I_2} = 0,92\,kg\,\frac{m}{s}\,\check{i} + 0,92\,kg\,\frac{m}{s}\,\check{j}}$$

(c) $$\Delta E_{c_{sist}} = Ec_f - Ec_0 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \left[\frac{1}{2} m_1 V_{1_0}^2 + \frac{1}{2} m_2 \underbrace{V_{2_0}^2}_{=0}\right]$$

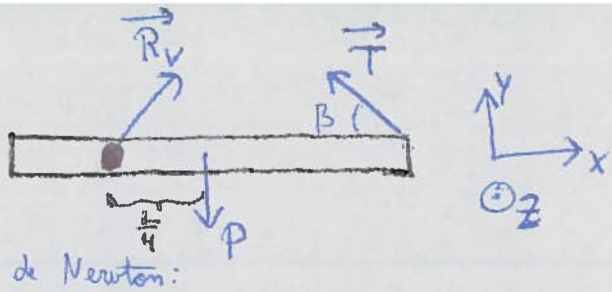
$$= \frac{1}{2} . 1\,kg . \left(1,84\,\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2} . 2\,kg . \left(0,65\,\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} . 1\,kg . \left(2,5\,\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\boxed{\Delta E_{c_{sist}} = -1,01\,J}$$

$\Rightarrow$ el choque es inelástico

(2) (a). DCL:

$\vec{T} = ?$



. 2da ley de Newton:

$x)\ -T\cos\beta + R_{V_x} = 0$ porque el sist. está en reposo

$y)\ T.\operatorname{sen}\beta + R_{V_y} - P = 0$

. Sumatoria de momentos:

$$\sum \vec{\tau}_{ext, CIR} = I^{CIR}.\vec{\gamma} = 0 \text{ porque el sist. está en reposo}$$

$$\vec{r}_{P,CIR} \times \vec{P} + \vec{r}_{T,CIR} \times \vec{T} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{L}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -M.g & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{3}{4}L & 0 & 0 \\ -T\cos\beta & T\operatorname{sen}\beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{L}{4}.Mg\ \check{k} + \frac{3}{4}L.T.\operatorname{sen}\beta\ \check{k} = 0$$

$$\frac{3}{\cancel{4}}\cancel{L}\,T\operatorname{sen}\beta\ \cancel{\check{k}} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{4}}M.g\ \cancel{\check{k}}$$

$$\boxed{T = \frac{M.g}{3.\operatorname{sen}\beta}}$$

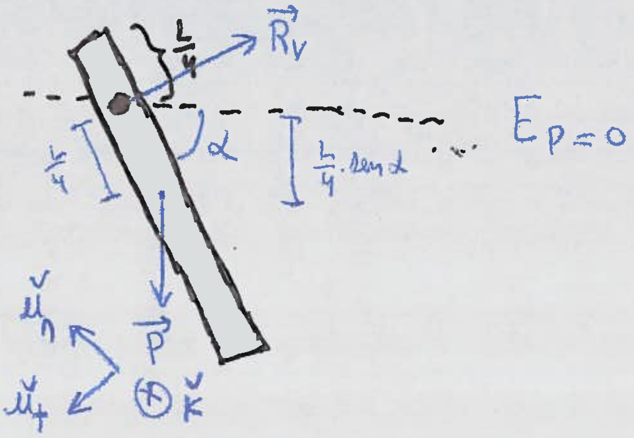
$$\Rightarrow \vec{T} = -T\cos\beta\ \check{i} + T.\operatorname{sen}\beta\ \check{j}$$

$$\vec{T} = -\frac{M.g}{3.\operatorname{sen}\beta}.\cos\beta\ \check{i} + \frac{M.g}{3.\operatorname{sen}\beta}.\operatorname{sen}\beta\ \check{j}$$

$$\boxed{\vec{T} = -\frac{Mg\cos\beta}{3\operatorname{sen}\beta}\check{i} + \frac{M.g}{3}\check{j}}$$

(b) $\vec{w}_\alpha = ?$;

. DCL:



$$\Delta E_M = W_{FNC} = \int \vec{R_V} \cdot d\vec{r_o} = 0$$ (entre el instante inicial y cuando forma un ángulo α)

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M \cdot L^2$$

$$I_{CIR} = \frac{1}{12} ML^2 + M \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} ML^2$$

$$\Rightarrow \Delta E_M = 0$$

$$E_{M_F} = E_{M_0}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_{CIR} \cdot \omega_\alpha^2 + M \cdot g \cdot \left(-\frac{L}{4} \operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{1}{2} I_{CIR} \underbrace{\omega_0^2}_{=0} + M \cdot g \cdot 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{48} ML^2 \cdot \omega_\alpha^2 - Mg\frac{L}{4} \operatorname{sen}\alpha = 0$$

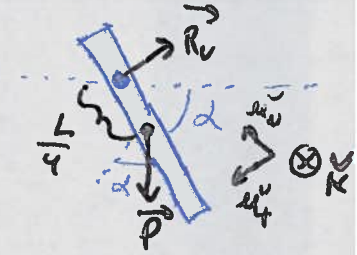
$$\frac{7}{\cancel{96}_{24}} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \omega_\alpha^2 = \cancel{M} g \frac{\cancel{L}}{\cancel{4}} \operatorname{sen}\alpha$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{24}{7L} \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega_\alpha} = \sqrt{\frac{24}{7L} g \operatorname{sen}\alpha}\ \check{k}}$$

(c) $\vec{\gamma_\alpha} = ?$; $\vec{a_{CM_\alpha}} = ?$

- Planteo $\Sigma \vec{\tau}_{ext,CIR} = I_{CIR} \cdot \vec{\gamma_\alpha}$



$$\vec{r}_{P,CIR} \times \vec{P} + \underbrace{\vec{r}_{CIR,CIR}}_{=0} \times \vec{R_V} = I_{CIR} \cdot \vec{\gamma_\alpha}$$

$$\begin{vmatrix} \check{t} & \check{n} & \check{k} \\ 0 & -\frac{L}{4} & 0 \\ P\cos\alpha & -P\operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix} = \frac{7}{48} M \cdot L^2 \cdot \vec{\gamma_\alpha}$$

$$\frac{\cancel{L}}{\cancel{4}} \cdot P \cdot \cos\alpha\ \check{k} = \frac{7}{\cancel{48}_{12}} ML^{\cancel{2}} \vec{\gamma_\alpha}$$

$$\cancel{M} \cdot g \cos\alpha\ \check{k} = \frac{7}{12} \cancel{M} L \cdot \vec{\gamma_\alpha}$$

$$\boxed{\frac{12}{7L} g \cos\alpha\ \check{k} = \vec{\gamma_\alpha}}$$

- Busco $\vec{a_{CM_\alpha}}$:

$$\vec{a_{CM_\alpha}} = \underbrace{\vec{a_{CIR_\alpha}}}_{=0} + \vec{\gamma_\alpha} \times \vec{r}_{CM,CIR} + \vec{\omega_\alpha} \times \left(\vec{\omega_\alpha} \times \vec{r}_{CM,CIR}\right)$$

$$\vec{a_{CM_\alpha}} = \left(\frac{12}{7L} g \cos\alpha\ \check{k}\right) \times \left(-\frac{L}{4}\ \check{n}\right) + \left(\sqrt{\frac{24 \operatorname{sen}\alpha\, g}{7L}}\ \check{k}\right) \times \left(\sqrt{\frac{24 \operatorname{sen}\alpha\, g}{7L}}\ \check{k}\right) \times \left(-\frac{L}{4}\ \check{n}\right)$$

$$\vec{a_{CM_\alpha}} = \begin{vmatrix} \check{t} & \check{n} & \check{k} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7L} g\cos\alpha \\ 0 & -\frac{L}{4} & 0 \end{vmatrix} + \left(\sqrt{\frac{24 \operatorname{sen}\alpha\, g}{7L}}\ \check{k}\right) \times \begin{vmatrix} \check{t} & \check{n} & \check{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{24 \operatorname{sen}\alpha\, g}{7L}} \\ 0 & -\frac{L}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_{CM_\alpha} = +\frac{\cancel{L}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{12}^{3}}{7\cancel{L}}\, g\cos\alpha\,\check{t} + \left(\sqrt{\frac{24\cdot g\,\text{sen}\,\alpha}{7L}}\,\check{k}\right) \times \left(\frac{L}{4}\sqrt{\frac{24\, g\cdot \text{sen}\,\alpha}{7L}}\,\check{t}\right)$$

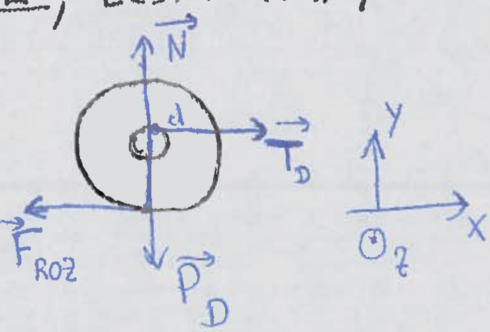
$$= \frac{3}{7}\, g\cos\alpha\,\check{t} + \begin{vmatrix} \check{t} & \check{n} & \check{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{24 g\,\text{sen}\,\alpha}{7L}} \\ \frac{L}{4}\sqrt{\frac{24 g\,\text{sen}\,\alpha}{7L}} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_{CM_\alpha} = \frac{3}{7}\, g\cos\alpha\,\check{t} + \frac{\cancel{L}}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{24\, g\,\text{sen}\,\alpha}{7\cancel{L}}}\right)^{2}\check{n}$$

$$\vec{a}_{CM_\alpha} = \frac{3}{7}\, g\cos\alpha\,\check{t} + \frac{\cancel{24}^{6}\, g\,\text{sen}\,\alpha}{\cancel{4}\cdot 7}\,\check{n}$$

$$\boxed{\vec{a}_{CM_\alpha} = \frac{3}{7}\, g\cos\alpha\,\check{t} + \frac{6\, g\cdot\text{sen}\,\alpha}{7}\,\check{n}}$$

3) (a) DCL; Ecs. de mov. y ecs. de vínculo



- 2 da ley de Newton

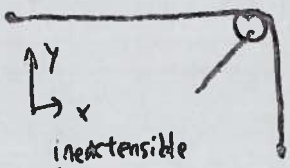
D) $\sum \vec{F}_{ext} = M_D \cdot \vec{a}_{CM_D}$

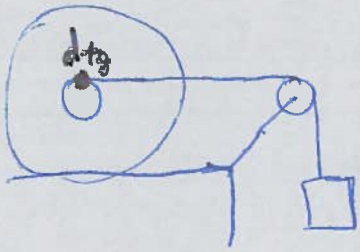
x) $T_D - F_{ROZ} = M_D \cdot a_{CM\,x}$

y) $N - P_D = 0$ porque el CM no se mueve verticalmente

B) y) $T_B - P_B = M_B \cdot a_{By}$

- Vínculos:
  - Soga ideal inextensible y masa $\simeq 0$





inextensible

$L = X_p - X_{d+g} + Y_p - Y_B$

$\frac{d^2}{dt^2}$

$0 = -a_{d+g} - a_{By}$

$\boxed{a_{d+g} = -a_{By}}$ (1)

- Polea ideal y Soga ideal: ($M_{polea} = 0$, $M_{soga} = 0$)

$\boxed{T_B = T_D = T}$

~~[illegible]~~ :

(b) $\vec{\gamma} = ?$. Para el bloque:

y) $T - mg = m \cdot a_{By} \overset{(1)}{=} m \cdot (-a_{d+g})$

$\boxed{T = mg - m a_{d+g}}$ (2)

- Planteo $\sum \vec{\tau}_{ext,\,CIR} = I_{CIR} \cdot \vec{\gamma}$

$$\underbrace{\vec{r}_{P,CIR} \times \vec{P}}_{\text{son } // \to \simeq 0} + \underbrace{\vec{r}_{N,CIR} \times \vec{N}}_{\simeq 0} + \vec{r}_{T,CIR} \times \vec{T} + \underbrace{\vec{r}_{CIR,CIR} \times \vec{F}_{ROZ}}_{=0} = I_{CIR}\, \vec{\gamma}$$

$$(4r\,\check{j}) \times (T\,\check{i}) = I_{cir} \cdot \vec{\gamma} \qquad ; \quad I_{CM} = \frac{1}{2} M R_D^2 = \frac{1}{2} M.(3r)^2$$

$$I_{cir} = \frac{9}{2} M r^2 + M(3r)^2$$

$$\boxed{I_{cir} = \frac{27}{2} M r^2}$$

$$\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 4r & 0 \\ T & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{27}{2} M.r^2.\vec{\gamma}$$

$$-4rT\,\check{k} = \frac{27}{2} M.r^2.\vec{\gamma}$$

. Reemplazo T con la expresión hallada en 2:

$$\left[-4r.[Mg - M.a_{d_{tg}}]\check{k} = \frac{27}{2} M r^2 \vec{\gamma} \right] \quad 3$$

. Hallo $a_{d_{tg}}$:

$$\vec{a}_d = \vec{a}_{cir} + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{d,cir} + \vec{\omega} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{d,cir}}_{v_{d,cir}})$$

$$\vec{a}_d = a_{cir}\,\check{j} + \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 4r & 0 \end{vmatrix} + (-\omega\,\check{k}) \times (\omega 4r\,\check{i})$$

$$\vec{a}_d = a_{cir}\,\check{j} + \underbrace{4r\gamma\,\check{i}}_{} + (-\omega^2 4r)\,\check{j}$$

$$\boxed{a_{d_{tg}} = 4r\gamma} \quad 4$$

Lo reemplazo en 3:

$$\vec{\gamma} = -\gamma\,\check{k}$$ (se para donde gira)

$$-4r.[Mg - M4r\gamma]\,\cancel{\check{k}} = \frac{27}{2} M r^2.(-\gamma)\,\cancel{\check{k}}$$

$$-4r.\cancel{M}g + 16r^2\cancel{M}\gamma = -\frac{27}{2}.(4\cancel{M}).r^2\gamma$$

$$16r^2\gamma + \frac{27}{\cancel{2}}.\cancel{4}^{2}r^2\gamma = 4rg$$

$$70r^{\cancel{2}}\gamma = 4\cancel{r}g$$

$$\left[\gamma = \frac{4g}{70r}\right] \quad 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -\frac{4g}{70r}\,\check{k}}$$

(c) $\vec{\omega} = ?$


$E_p = 0$ en el CM del disco

• Inicialmente en reposo y luego M_B baja una distancia d

• Planteo $\Delta E_{M_{disco}} = W_{F_{NC_{disco}}} = \underbrace{W_N}_{=0} + \underbrace{W_{F_R}}_{=0} + W_T$

$$E_{M_F} - E_{M_0} = \int_0^d T\cdot dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot I_{cir}\cdot\omega^2 + \underbrace{4m\cdot g\cdot 0}_{=0} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} I_{cir}\underbrace{\omega_0^2}_{=0} + 4mg\cdot 0\right]}_{=0} = T\cdot d$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{27}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}m\cdot r^2\omega^2 = T\cdot d \quad ; \quad T \overset{②, ④ \text{ y } ⑤}{=} mg - m\cdot\cancel{4r}_{2}\cdot\frac{4g}{\cancel{70r}_{35}}$$

$$\cancel{27}\cancel{m}r^2\omega^2 = \frac{\cancel{27}}{35}\cancel{m}g\cdot d \qquad = mg - m\cdot\frac{8g}{35}$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{27}{35}mg}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\cdot d}{35 r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \sqrt{\frac{g d}{35 r^2}}\ \check{k}}$$