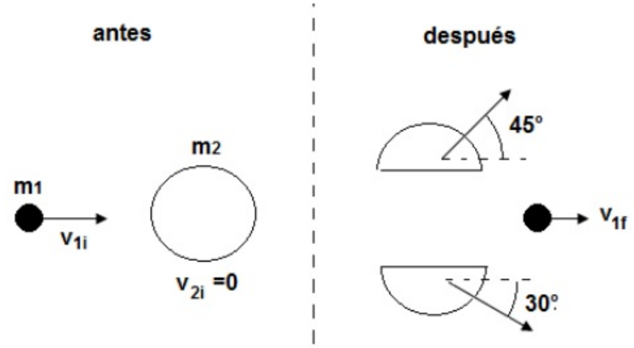
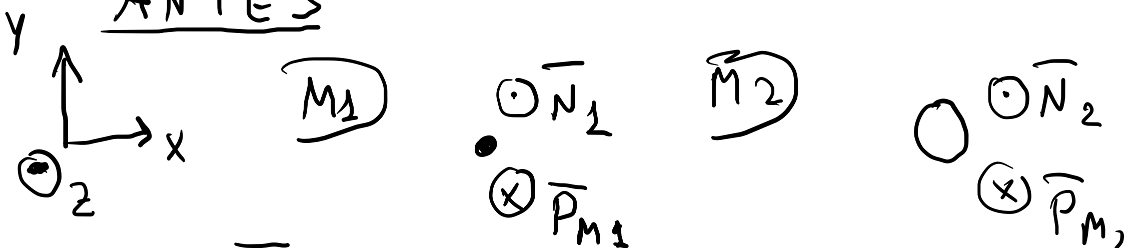
PROB 1: Una partícula de m_1=10g de masa choca contra un cuerpo de m_2=1kg de masa que se encuentra en reposo. El choque sucede sobre una superficie horizontal que no presenta rozamiento, en la figura está vista desde arriba. La partícula incidente tiene una velocidad de módulo v_{1i}=1000 m/s y en el choque, pierde el 99% de su rapidez. El cuerpo m_2 se rompe en dos fragmentos de igual masa, que obtienen velocidades en las direcciones indicadas en la figura.



a) Calcular las velocidades con las que salen los fragmentos de la masa m_2 luego del choque.
b) Indicar si es un choque elástico, inelástico o explosivo y justificar.
c) Calcular el impulso que realizan durante el choque todas las fuerzas que actúan sobre la partícula incidente m_1.

(a) DCL. Uso sist de ref. inercial fijo a Tierra.

ANTES



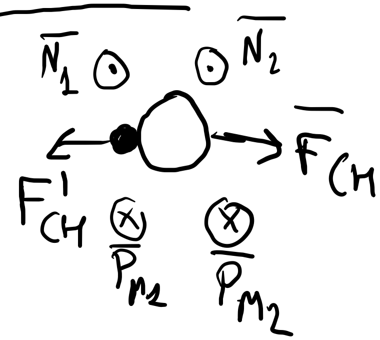
$$\sum \overline{F}_{ext} = \frac{d\overline{P}_{sist}}{dt}$$

No hay mov. en el eje z.

z) $N_1 + N_2 - P_{M_1} - P_{M_2} = 0$

$$\Rightarrow \sum \overline{F}_{ext} = \frac{d\overline{P}_{sist}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{P}_{sist} \text{ se CONSERVA}}$$

DURANTE



z) $N_1 + N_2 - P_{M_1} - P_{M_2} = 0$

x) No hay fuerzas externas. Las fuerzas de choque son internas

$$\Rightarrow \sum \overline{F}_{ext} = \frac{d\overline{P}_{sist}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{P}_{sist} \text{ se conserva}}$$

. Como $\overline{P}_{sist}$ se conserva <u>durante</u> el choque:

$$\Rightarrow \quad \overline{P}_{sist_i} = \overline{P}_{sist_F}$$

$$X) \quad m_1 V_{1i} = m_1 V_{1F} + \frac{m_2}{2} V_{21_F} \cos(45°) + \frac{m_2}{2} V_{22_F} \cos(30°) \quad (1)$$

$$Y) \quad 0 = \frac{m_2}{2} V_{21_F} \operatorname{sen}(45°) - \frac{m_2}{2} V_{22_F} \operatorname{sen}(30°)$$

porque el fragmento 2 va "hacia abajo"

$$\frac{\cancel{m_2}}{\cancel{2}} V_{22_F} \operatorname{sen}(30°) = \frac{\cancel{m_2}}{\cancel{2}} V_{21_F} \operatorname{sen}(45°)$$

$$\boxed{V_{22_F} = 1{,}41 \cdot V_{21_F}} \quad (2)$$

• $V_{1F} = 1\% \cdot V_{1i} = 0{,}01 \cdot V_{1i} = 0{,}01 \cdot 1000 \frac{m}{s} = \boxed{10 \frac{m}{s}} \quad (3)$

. Reemplazo (2) y (3) en (1) y despejo V_{21_F}:

$$m_1 V_{1i} = m_1 V_{1F} + \frac{m_2}{2} V_{21_F} \underbrace{\cos(45°)}_{0{,}71} + \frac{m_2}{2} (1{,}41\, V_{21_F}) \underbrace{\cos(30°)}_{0{,}87}$$

$$m_1 V_{1i} - m_1 V_{1F} = \left(\frac{m_2}{2} 0{,}71 + \frac{m_2}{2} 1{,}41 \cdot 0{,}87\right) V_{21_F}$$

$$m_1 (V_{1i} - V_{1F}) = \frac{m_2}{2} (0{,}71 + 1{,}41 \cdot 0{,}87)\, V_{21_F}$$

$$0{,}01\,\cancel{kg}\left(1000\,\frac{m}{s}-10\,\frac{m}{s}\right)=\frac{1\,\cancel{kg}}{2}\cdot 2{,}94\cdot V_{21F}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{21F}=10{,}21\,\frac{m}{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{22F}=1{,}41\cdot 10{,}21\,\frac{m}{s}=14{,}4\,\frac{m}{s}}$$

- $$\vec{V}_{21F}=10{,}21\,\frac{m}{s}\cdot\cos(45^\circ)\,\check{i}+10{,}21\,\frac{m}{s}\,\operatorname{sen}(45^\circ)$$

$$=\boxed{7{,}22\,\frac{m}{s}\,\check{i}+7{,}22\,\frac{m}{s}\,\check{j}}$$

- $$\vec{V}_{22F}=14{,}4\,\frac{m}{s}\cdot\cos(30^\circ)\,\check{i}-14{,}4\,\frac{m}{s}\cdot\operatorname{sen}(30^\circ)\,\check{j}$$

$$=\boxed{12{,}47\,\frac{m}{s}\,\check{i}-7{,}2\,\frac{m}{s}\,\check{j}}$$

(b). Calculo la $\Delta E_C = E_{C_F} - E_{C_i}$

$$= \frac{1}{2} M_1 V_{1F}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_2}{2} V_{21F}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_2}{2} V_{22F}^2 - \frac{1}{2} M_1 V_{1i}^2$$

$$= \frac{1}{2} 0{,}01\,kg \cdot \left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1\,kg \left(10{,}22\,\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{4} 1\,kg \left(14{,}4\,\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} 0{,}01\,kg \left(1000\,\frac{m}{s}\right)^2$$

$$= 0{,}5\,J + 26{,}06\,J + 51{,}84\,J - 5000\,J$$

$$= \boxed{-4921{,}6\,J}$$

$\Rightarrow$ el choque es inelástico, porque se pierde energía cinética

Repaso: CHOQUES : ΔE_C
- $= 0 \rightarrow$ ELÁSTICO
- $< 0 \rightarrow$ INELÁSTICO
- $> 0 \rightarrow$ EXPLOSIVO

(c) $\overline{I}_{M_1} = \int (\underbrace{\sum \overline{F}_{ext_1}}_{\text{durante el choque}}) \, dt = \Delta \overline{P}_1$

$$= \overline{P}_{1_f} - \overline{P}_{1_i}$$

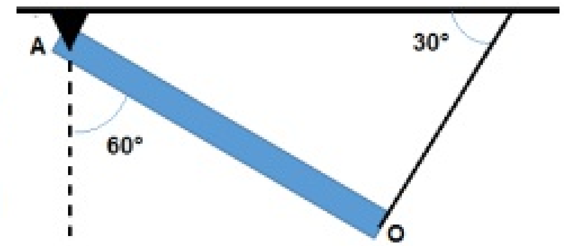
$$= m_1 \overline{V}_{1_f} - m_1 \overline{V}_{1_i}$$

$$= 0{,}01\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s}\,\check{i} - 0{,}01\,kg \cdot 1000\,\frac{m}{s}\,\check{i}$$

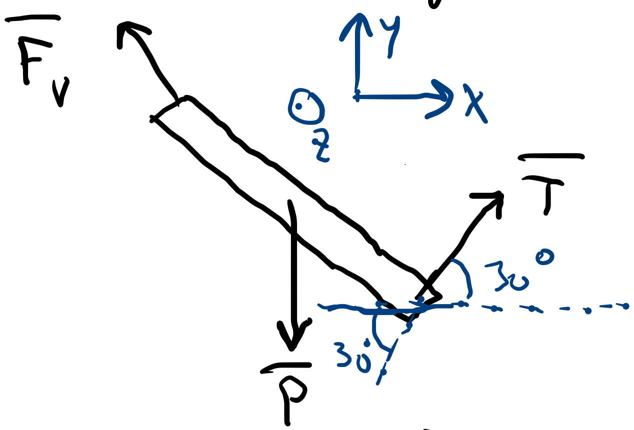
$$= \boxed{-9{,}9\,kg\,\frac{m}{s}\,\check{i}}$$

PROB 2: Una barra de longitud L y masa M está colgada de un eje alrededor del cual puede rotar libremente (punto A), y atada por una soga de masa despreciable al techo en su otro extremo (punto O). Inicialmente la barra está en equilibrio, en la posición indicada en la figura.

a) Hallar la tensión de la soga y la fuerza que ejerce el eje de la barra.
b) En un determinado instante se corta la soga. Calcular la aceleración angular de la barra y el vector aceleración del punto O, inmediatamente después de cortarse la soga.
c) La barra cae, girando alrededor del eje que pasa por A. Calcular la velocidad angular de la barra en el instante en que pasa por la posición vertical.



(a) DCL. Sist. de ref. inercial fijo a Tierra



. $\Sigma \overline{F_{ext}} = M.\overrightarrow{a_{CM}}$ equilibrio

x) $T\cos(30°) - F_{Vx} = 0$ (1)

y) $F_{Vy} + T\,\text{sen}(30°) - Mg = 0$ (2)

• Planteo $\Sigma \overrightarrow{\tau}_{ext,A} = I_A \overrightarrow{\gamma} = 0$ equilibrio

$$\underbrace{\overline{r}_{F_V,A}}_{0} \times \overline{F_V} + \overline{r}_{\overline{P},A} \times \overline{P} + \overline{r}_{\overline{T},A} \times \overline{T} = 0$$

$$0 + \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array} \begin{vmatrix} \frac{L}{2}\text{sen}(60°) & -\frac{L}{2}\cos(60°) & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} + \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array} \begin{vmatrix} L\,\text{sen}(60°) & -L\cos(60°) & 0 \\ T\cos(30°) & T\,\text{sen}(30°) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{L}{2} M g \underbrace{\operatorname{sen}(60^\circ)}_{0,866} \check{k} + L T \Big(\underbrace{\operatorname{sen}(60^\circ)\operatorname{sen}(30^\circ) + \cos(60^\circ)\cos(30^\circ)}_{0,866}\Big) \check{k} = 0$$

$$\cancel{L} T \cdot \cancel{0,866}\, \cancel{\check{k}} = \frac{\cancel{L}}{2} M g\, \cancel{0,866}\, \cancel{\check{k}}$$

$$\boxed{T = \frac{M g}{2}} \quad (3)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{T} = \frac{Mg}{2} \cos 30^\circ \check{i} + \frac{Mg}{2} \operatorname{sen}(30^\circ) \check{j}}$$

. Reemplazo (3) en (1) y despejo F_{Vx}:

$$F_{Vx} = T \cos(30^\circ) = \boxed{\frac{Mg}{2} \cdot 0,866}$$

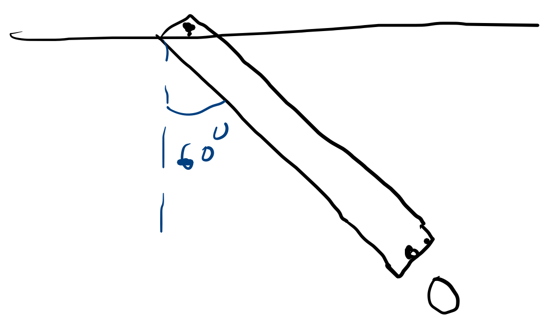
. Reemplazo (3) en (2) y despejo F_{Vy}:

$$F_{Vy} = Mg - T \operatorname{sen}(30^\circ) = Mg - \frac{Mg}{2} \cdot 0,5 = \boxed{\frac{3}{4} Mg}$$

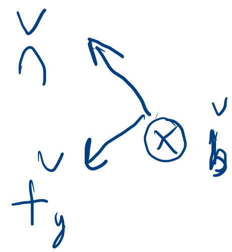
b)

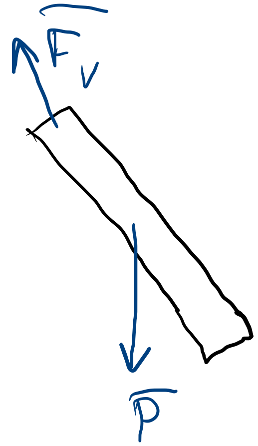
$\bar{\gamma} = ?$

$\vec{a}_O = ?$



. DCL.





. Planteo $\sum \vec{\tau}_{ext,A} = I_A \bar{\gamma}$

$$\frac{L}{2} M g \, sen(60°) \, \check{b} = I_A \bar{\gamma}$$

$$\frac{\cancel{L}}{2} \cancel{M} g \, sen(60°) \, \check{b} = \frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \bar{\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\gamma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{g}{L} \, sen(60°) \, \check{b}}$$

$$I_A = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_A = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M L^2$$

$$\boxed{I_A = \frac{1}{3} M L^2}$$

punto A no se mueve

• Planteo:

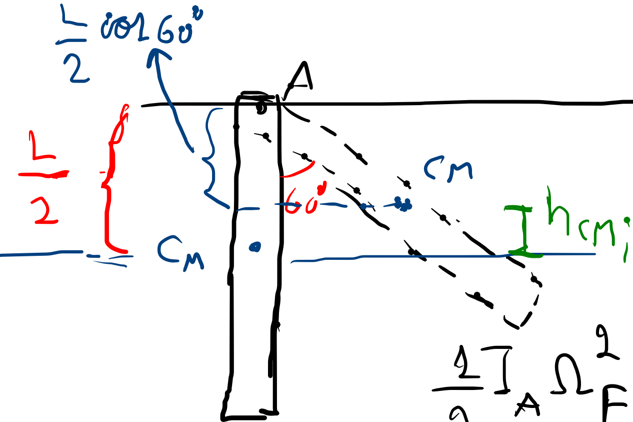
$$\vec{a}_O = \underbrace{\vec{a}_A}_{0} + \bar{\gamma} \times \bar{r}_{O,A} + \underbrace{\bar{\Omega}}_{0} \times (\underbrace{\bar{\Omega}}_{0} \times \bar{r}_{O,A})$$

Velocidad angular inicial nula

$$\vec{a}_O = \begin{vmatrix} \check{t}_g & \check{n} & \check{b} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\frac{g}{L} sen(60°) \\ 0 & -L & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a}_O = \frac{3}{2} g \, sen(60°) \, \check{t}_g}$$

(c) $\vec{\Omega}_F = ?$



. Planteo $\Delta E_M = W_{FNC}$

$$E_{M_F} - E_{M_i} = W_{F_V}$$

$$\frac{1}{2} I_A \Omega_F^2 + Mg\,\underbrace{h_{CM_F}}_{0} - \left(Mg\,h_{CM_i} + \frac{1}{2} I_A \underbrace{\Omega_i^2}_{0}\right) = \underbrace{\int \bar{F}_V \cdot \bar{dr}}_{0}$$

→ A no se desplaza ⟹ $\bar{F}_V$ no hace trabajo

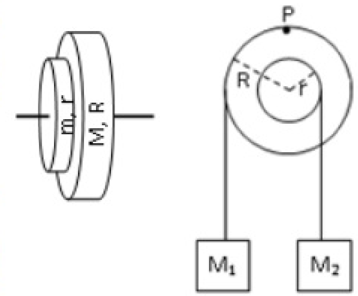
$$\cdot\, h_{CM_i} = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos 60° = \frac{L}{2}\left(1 - \cos 60°\right)$$

$$\frac{1}{2} I_A \Omega_F^2 - Mg\,h_{CM_i} = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\,\Omega_F^2 = \cancel{M}g \cdot \frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\left(1 - \cos 60°\right)$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_F = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(1 - \cos 60°\right)}\;\check{b}}$$

PROB 3: Una polea formada por dos discos soldados entre sí, uno de radio r = 10 cm y masa m = 2 kg y otro de radio R = 20 cm y masa M = 4 kg, gira libremente sobre un eje que pasa por su centro sin rozamiento con el soporte. Sobre cada uno de los cilindros, se cuelgan dos masas M_1= M_2=1kg mediante sogas ideales y el sistema se encuentra inicialmente en reposo.

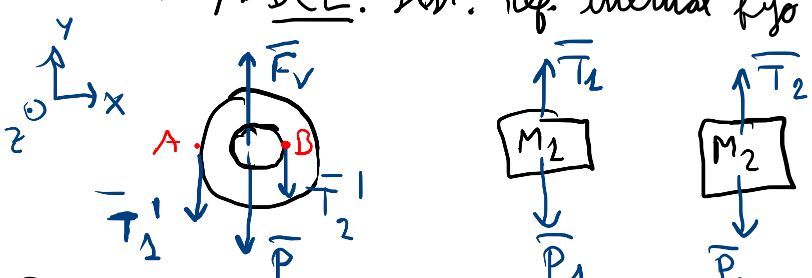


a) Calcular el momento de inercia baricéntrico de la polea formada por los dos discos.
b) Calcular la aceleración angular de la polea.
c) Cuando el módulo de la velocidad angular de la polea es 1rad/seg, ¿cuánto vale el vector velocidad y el vector aceleración del punto P, situado en el punto más alto de la polea?
d) ¿Se conserva la energía mecánica de la polea? ¿Y del sistema formado por la polea y las dos masas? Justificar a partir del trabajo de las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos.

(a) $I_T = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}4kg(0,2m)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2kg(0,1m)^2$

$= \boxed{0,09\ kg\,m^2}$

(b) . DCL. sist. ref. inercial fijo a Tierra.



. Planteo $\sum \bar{\tau}_{ext,CM} = I_T\bar{\gamma}$

$R\,T_1'\,\check{k} - r\,T_2'\,\check{k} = I_T\bar{\gamma}$ (1)

. Hallo T_1' y T_2' despejando a_1 y a_2:

. $\bar{a}_A = \underbrace{\bar{a}_{CM}}_{0} + \bar{\gamma}\times\bar{r}_{A,CM} + \underbrace{\bar{\Omega}}_{0}\times\underbrace{\bar{\Omega}}_{0}\times\bar{r}_{A,CM}$

→ $\bar{a}_A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\gamma R\,\check{j}$ → $\boxed{a_1 = a_{tgA} = -\gamma R}$ (4)

. $\bar{a}_B = \bar{\gamma}\times\bar{r}_{B,CM} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \gamma r$ → $\boxed{a_2 = a_{tgB} = \gamma r}$ (5)

Y) $F_V - (M+m)g - T_1' - T_2' = 0$

Y) $T_2 - M_2 g = M_2 a_2$ (3)

Y) $T_1 - M_1 g = M_1 a_1$ (2)

. Soga ideal:

$\boxed{T_1' = T_1}$; $\boxed{T_2' = T_2}$; $\boxed{a_1 = a_{tgA}}$; $\boxed{a_2 = a_{tgB}}$

- Reemplazo (4) en (2) y despejo T_1:

$$T_1 - M_1 g = M_1(-\gamma R) \rightarrow T_1 = M_1 g - M_1 \gamma R$$

$$T_1 = M_1(g - \gamma R) \quad (6)$$

- Reemplazo (5) en (3) y despejo T_2:

$$T_2 - M_2 g = M_2(\gamma r) \rightarrow T_2 = M_2(g + \gamma r) \quad (7)$$

- Usando que $T_1 = T_1'$ y $T_2 = T_2'$, reemplazo (6) y (7) en (1) y despejo γ:

$$R T_1' \check{k} - r T_2' \check{k} = I_T \bar{\gamma}$$

$$R M_1(g - \gamma R) \cancel{\check{k}} - r M_2(g + \gamma r) \cancel{\check{k}} = I_T \gamma \cancel{\check{k}}$$

$$R M_1 g - M_1 \gamma R^2 - r M_2 g - M_2 \gamma r^2 = I_T \gamma$$

$$R M_1 g - r M_2 g = I_T \gamma + M_1 R^2 \gamma + M_2 r^2 \gamma = (I_T + M_1 R^2 + M_2 r^2)\gamma$$

$$\frac{(R M_1 - r M_2)\, g}{(I_T + M_1 R^2 + M_2 r^2)} = \gamma$$

$$\frac{(0{,}2\,m\, 4\,kg - 0{,}1\,m\, 2\,kg)\, 9{,}8\,m/s^2}{(0{,}09\,kg\,m^2 + 4\,kg\,(0{,}2\,m)^2 + 2\,kg\,(0{,}1\,m)^2} = \gamma \rightarrow \gamma = \frac{5{,}88\,\cancel{kg}\,\cancel{m^2}\frac{}{s^2}}{0{,}27\,\cancel{kg}\,\cancel{m^2}} = \boxed{21{,}78 \cdot \frac{1}{s^2}}$$

(c) $\vec{V}_p = ?$; $\vec{a}_p = ?$ cuando $|\Omega| = 1$ rad/s

. Como la $\bar{\gamma}$ es positiva en z, entonces sabemos que la polea girará en sentido antihorario, entonces $\bar{\Omega}$ es positiva en z $\rightarrow$ $\boxed{\bar{\Omega} = 1 \cdot \frac{1}{s} \, \check{k}}$

. Planteo $\bar{V}_p = \bar{V}_{CM} + \bar{\Omega} \times \bar{r}_{P,CM}$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\Omega R \, \check{i} = -1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 0{,}2\,m\,\check{i} = \boxed{-0{,}2 \, \frac{m}{s} \, \check{i}}$$

. Planteo $\bar{a}_p = \bar{a}_{CM} + \bar{\gamma} \times \bar{r}_{P,CM} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}_{P,CM})$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} + \bar{\Omega} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\gamma R \, \check{i} + \bar{\Omega} \times (-\Omega R \, \check{i})$$

$$= -\gamma R \, \check{i} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\gamma R \check{i} - \Omega^2 R \, \check{j}$$

$$= -\left(21{,}78 \cdot \frac{1}{s^2}\right) \cdot 0{,}2\,m \, \check{i} - \left(1 \cdot \frac{1}{s}\right)^2 0{,}2\,m \, \check{j} = \boxed{-4{,}36 \, \frac{m}{s^2} \, \check{i} - 0{,}2 \, \frac{m}{s^2} \, \check{j}}$$

(d) . No se conserva la energía mecánica de la polea porque:

(El sistema en este caso es sólo la polea)

$$\Delta E_M = W_{F_{NC}} = \underbrace{W_{\overline{F}_V}}_{0} + \underbrace{W_{\overline{T}_1'}}_{\neq 0} + \underbrace{W_{\overline{T}_2'}}_{\neq 0} \neq 0$$

$\overline{T}_1'$ y $\overline{T}_2'$ hacen trabajo

. Sí se conserva la E_M del sistema polea + 2 masas:

$$\Delta E_M = W_{F_{NC}} = \underbrace{W_{\overline{F}_V}}_{0} + W_{\overline{T}_1'} + W_{\overline{T}_2'} + W_{\overline{T}_1} + W_{\overline{T}_2}$$

$= 0$ porque el trabajo de $\overline{T}_1'$ se cancela con el de $\overline{T}_1$ y el de $\overline{T}_2'$ se cancela con el de $\overline{T}_2$