Trabajo por definición

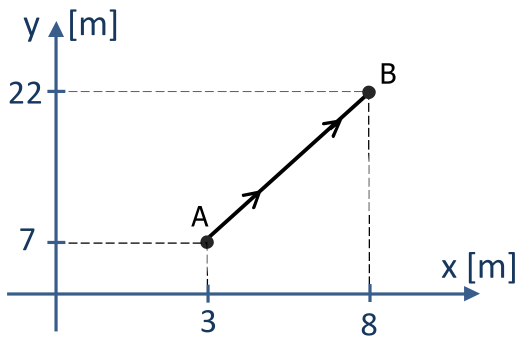
$$W_F^{A,B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Problemas con fuerza conocida en cada punto del espacio

Para los siguientes problemas **(1-5)**, donde una partícula se mueve desde A hasta B, calcular, por definición, el trabajo que la fuerza $\vec{F}$ le realiza a la partícula a lo largo de la trayectoria AB indicada, usando un parámetro creciente: t ϵ [t_A,t_B].

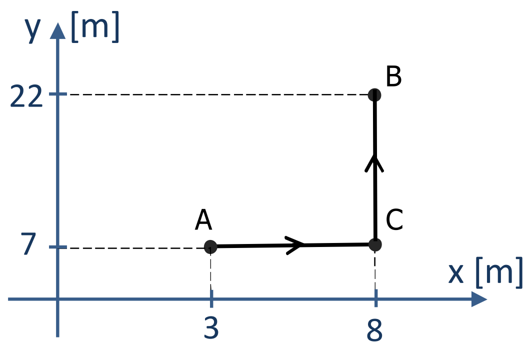
1) $\vec{F} = 3x\,\check{\imath}\,\frac{N}{m}$

a) La partícula recorre la trayectoria siguiente A → B:

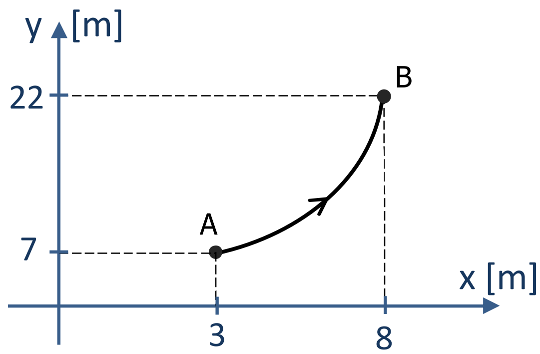


b) Misma trayectoria anterior, pero ajustando el parámetro para que este comience desde t = 0.

c) La trayectoria A →B parte desde A, horizontalmente hasta C(8;7), luego desde C verticalmente hasta B.



d) La trayectoria A → B es ahora la curva y = 3/5 $(x-3)^2$+7

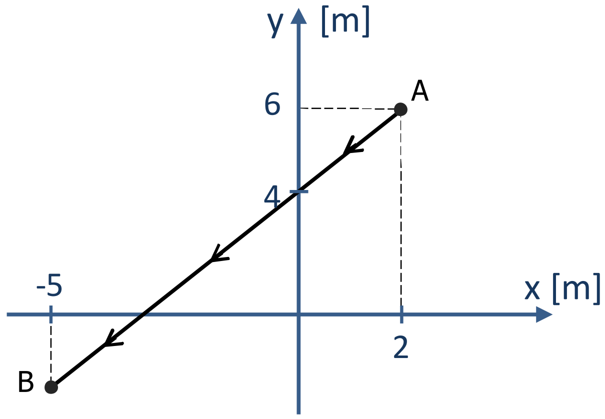


e) hacer la prueba de las derivadas cruzadas e informar si se trata (o no) de un campo conservativo

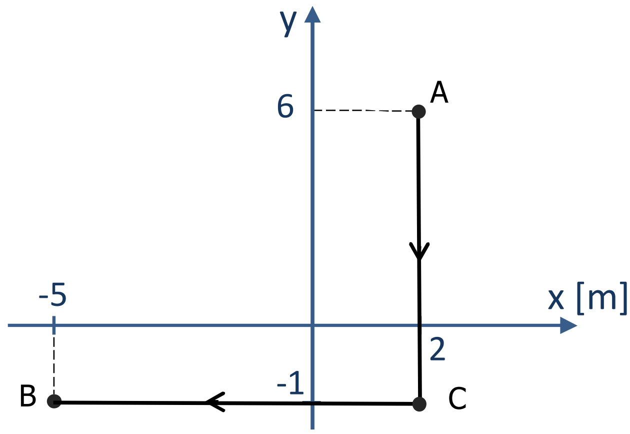
Rta: a) b) c) d) $W_F^{A,B} = 82{,}5\,J$ e) el campo de fuerzas $\vec{F}$ es conservativo

2) $\vec{F} = (2x + y)\,\check{\jmath}\,\dfrac{N}{m}$

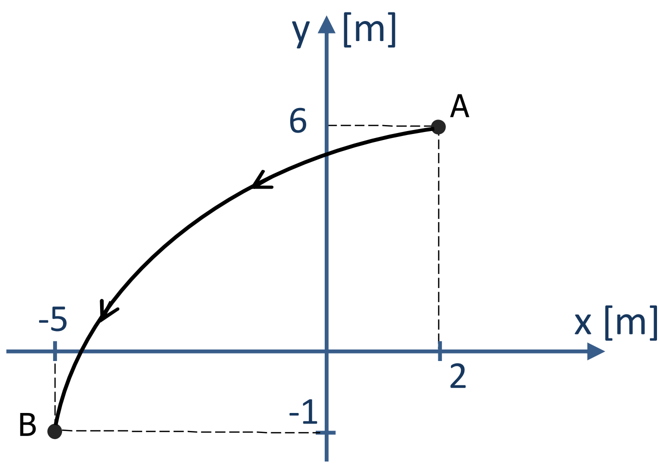
a) La partícula recorre la trayectoria siguiente A → B:



b) La trayectoria es desde A moviéndose verticalmente hasta C(2;-1), luego desde C en movimento horizontal hasta B.



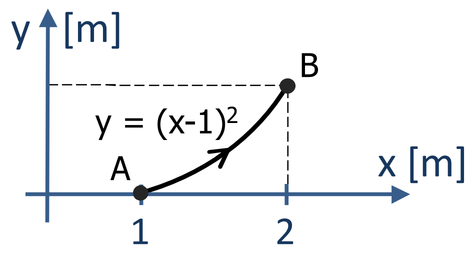
c) La trayectoria A → B es ahora la curva $y = -1/7\,(x-2)^2+6$



d) hacer la prueba de las derivadas cruzadas e informar si se trata (o no) de un campo conservativo

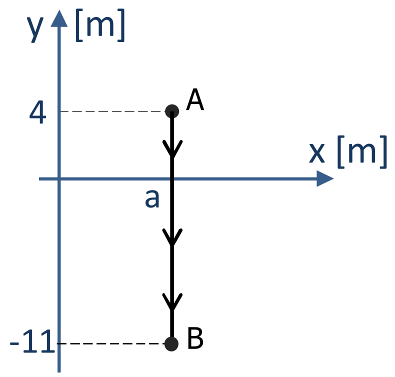
Rta: a) 3,5 J b) -45,5 J c) 19,83 J d) el campo de fuerzas $\vec{F}$ no es conservativo

3) $\vec{F} = x\,\check{j}\,\dfrac{N}{m}$



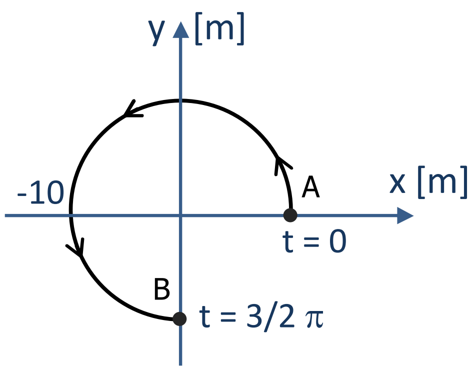
Rta: $W_F^{A,B} = 5/3\,J$

4) $\vec{F} = -5x\,\check{\imath}\,\dfrac{N}{m}$



Rta: $W_F^{A,B} = 0$

5) $\vec{F} = 2x\,\check{\imath}\,\dfrac{N}{m}$



Rta: $W_F^{A,B} = -100\,J$

Más problemas con trabajo por definición

6) Una partícula se mueve hacia x > 0, y recorre 10 m desde el punto A hasta el punto B, ambos situados en el eje x. Su peso es 20 N, y sufre una fuerza de rozamiento dinámico con $\mu_d = 0{,}25$. Calcular, por definición, el trabajo de f_{rd}.

Rta: $W_{f_{rd}}^{A,B} = -50\,J$

7) Se dispara una partícula de m = 1 kg, en tiro horizontal hacia la derecha; la partícula está inicialmente a 10 m de altura, y arranca con rapidez 5 m/s. Calcular, por definición, el trabajo de la fuerza peso desde el inicio del movimiento hasta t = 1 s.

Rta: $W_P^{A,B} = 48{,}02\,J$

8) Una fuerza actúa sobre un punto material de manera que $\vec{F} = 3xy\,\breve{\imath}$ donde x e y son medidas en [m] y la fuerza en [N]. El punto sigue una trayectoria rectilínea desde el origen hasta x= 0 , y = 2. Luego sigue paralela a x desde (0;2) hasta (2;2). Finalmente regresa al origen por una recta. Dibujar la trayectoria. Calcular el trabajo realizado por la fuerza en cada tramo y en el recorrido cerrado completo. ¿Es conservativa la fuerza? Justificar la respuesta.

Rta: no es conservativa pues la trayectoria es cerrada y su trabajo no es cero

9) Una fuerza $\vec{F} = \left(4x\,\breve{\imath} + 3y\,\breve{\jmath}\right)$ N actúa sobre un objeto mientras el objeto se mueve en la dirección x desde el origen hasta x = 5 m. Hallar el trabajo que la fuerza le realiza al objeto durante dicho trayecto.

Rta: $W_F^{A,B} = 50\,J$

Problemas con fuerza que varía en el tiempo

10) Una fuerza $\vec{F} = 6\,t\,N/s\,\breve{\imath}$ está aplicada sobre una partícula de masa 2 kg. Si la partícula parte del reposo, hallar el trabajo realizado por la fuerza durante los primeros 2 seg.

Rta: $W_F^{A,B} = 36\,J$

11) Una partícula de masa 4 kg está en reposo en el origen de coordenadas. Sobre ella actúa una fuerza neta que depende del tiempo y de la posición según la expresión $\vec{F} = 3\,t\,N/s\,\breve{\imath} + 20\,x\,N/m\,\breve{\jmath}$. Calcular, por definición, el trabajo de la fuerza entre el instante inicial y t = 2 s

Rta: $W_F^{A,B} = 17\,J$

12) Una partícula de masa 1 kg se mueve en el plano XY con aceleración $\vec{a} = 6\,t\,m/s^3\,\breve{\jmath}$. Se sabe que para t = 0 la partícula se encuentra en las coordenadas (1;1) y tiene velocidad $\vec{v} = 1\,m/s\,\breve{\imath}$. Calcular el trabajo, por definición, de la fuerza neta aplicada sobre la partícula para x ϵ [0 m ; 2 m]

Rta: $W_F^{A,B} = 0$

Trabajo por definición

Ejemplo del Alonso y Finn (pág. 209)

Donde la fuerza varía en el tiempo

Es el problema N°10 (ver más arriba)

EJEMPLO 8.4. **Una fuerza $F = 6t$ N actúa sobre una partícula de 2 kg de masa. Si la partícula parte del reposo, hallar el trabajo efectuado por la fuerza durante los primeros 2 s.**

Solución: **En el ejemplo anterior fue fácil calcular el trabajo porque conocíamos la fuerza como función de la posición ($F = kx$). Pero en este ejemplo conocemos la fuerza solamente como función del tiempo ($F = 6t$). Por ello no podemos calcular directamente el trabajo usando $W = \int F\,dx$. En cambio debemos hallar el desplazamiento en términos del tiempo, usando la ecuación del movimiento, $F = ma$. Esto es, $a = F/m = 3t$ m s^{-2}. Usando la ec. (5.6), con $v_0 = 0$, podemos escribir, ya que la partícula parte del reposo**

$$v = \int_0^t (3t)\,dt = 1{,}5t^2 \text{ m s}^{-1}.$$

Si usamos ahora la ec. (5.3) con $x_0 = 0$, y si tomamos nuestro origen de coordenadas en el punto inicial, obtenemos

$$x = \int_0^t (1{,}5t^2)\,dt = 0{,}5t^3 \text{ m}.$$

Teniendo ahora x en función del tiempo, podemos proseguir de dos maneras diferentes.

(a) Buscando t, encontramos $t = (x/0{,}5)^{1/3} = 1{,}260x^{1/3}$, y la fuerza en términos de la posición es entonces $F = 6t = 7{,}560x^{1/3}$ N. Utilizando la ec. (8.5), tenemos entonces

$$W = \int_0^x (7{,}560x^{1/3})\,dx = 5{,}670x^{4/3}.$$

Cuando $t = 2$, tenemos $x = 0{,}5(2)^3 = 4$ m, y por tanto $W = 36{,}0$ J.

(b) También podemos proceder de otra manera: De $x = 0{,}5t^3$, deducimos $dx = 1{,}5t^2\,dt$. Luego, usando para la fuerza su expresión en términos del tiempo, $F = 6t$, escribimos

$$W = \int_0^t (6t)\,(1{,}5t^2\,dt) = 2{,}25t^4 \text{ J},$$

y si hacemos $t = 2$ s, obtendremos $W = 36{,}0$ J, en concordancia con el resultado anterior.

Este segundo método es el que debemos usar cuando conozcamos la fuerza en función del tiempo, ya que aún después de resolver la ecuación del movimiento puede ser difícil expresar, en general, la fuerza como función de posición.

Trabajo por definición

Ejemplo del Giancoli (pág. 171)

Donde la fuerza viene como función de la posición, y el movimiento es en ese eje

Ley de una fuerza más compleja: El brazo de un robot

EJEMPLO 7–6 **Fuerza en función de *x*.** En un sistema automático de vigilancia, un brazo de robot que controla la posición de una cámara de video (figura 7-12) es manipulado por un motor que ejerce una fuerza sobre el brazo. La fuerza está dada por

$$F(x) = F_0\left(1 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{x_0^2}\right),$$

donde $F_0 = 2.0$ N, $x_0 = 0.0070$ m, y x es la posición del extremo del brazo. Si éste se mueve de $x_1 = 0.010$ m a $x_2 = 0.050$ m, ¿cuánto trabajo realizó el motor?

PLANTEAMIENTO La fuerza aplicada por el motor no es una función lineal de x. Podemos determinar la integral $\int F(x)dx$, o el área bajo la curva $F(x)$ (que se muestra en la figura 7-13).

SOLUCIÓN Integramos para hallar el trabajo realizado por el motor:

$$W_M = F_0\int_{x_1}^{x_2}\left(1 + \frac{x^2}{6x_0^2}\right)dx = F_0\int_{x_1}^{x_2}dx + \frac{F_0}{6x_0^2}\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx$$

$$= F_0\left(x + \frac{1}{6x_0^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Insertamos los valores dados y obtenemos

$$W_M = 2.0\,\text{N}\left[(0.050\,\text{m} - 0.010\,\text{m}) + \frac{(0.050\,\text{m})^3 - (0.010\,\text{m})^3}{(3)(6)(0.0070\,\text{m})^2}\right] = 0.36\,\text{J}.$$

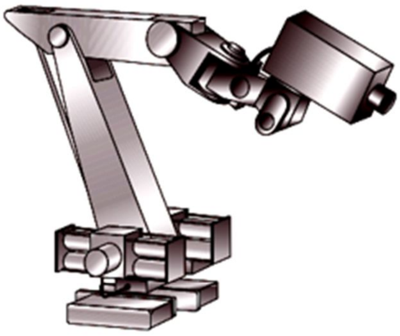


FIGURA 7–12 El brazo del robot controla una cámara de video.

FIGURA 7–13 Ejemplo 7-6.