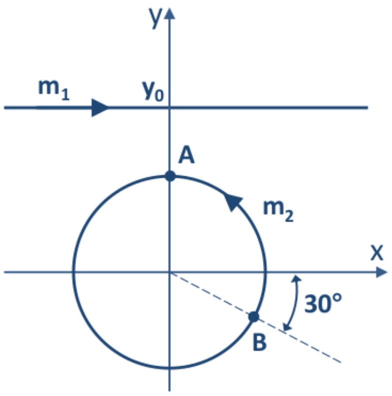
Ejercicio 13 de la versión anterior de la guía

Enunciado



13. Sobre una superficie plana horizontal, el móvil 1 desarrolla un MRU, tal que su rapidez es 12 m/s. El móvil 2 realiza un MCU con $\mathbf{\Omega} = 2\ s^{-1}\ \mathbf{k}$ sobre una circunferencia de radio 1 m. En t=0, el móvil 1 tiene posición $\mathbf{r}_1(0) = y_0\ \mathbf{j}$, mientras que el móvil 2 tiene posición $\mathbf{r}_2(0) = 1\ m\ \mathbf{i}$.

Hallar:

a) Velocidad relativa en el tiempo $\vec{v}_{1/2}(t)$

b) Aceleración relativa en el tiempo $\vec{a}_{1/2}(t)$

c) Velocidad relativa $\vec{v}_{1/2}$, cuando el 2 pasa por A, y cuando pasa por B

d) Aceleración relativa del móvil 2 respecto del piso y respecto del móvil 1, cuando pasa por A.

Resolución en la siguiente página

Ejercicio 13 - Unidad 1

a)

La velocidad relativa del móvil 1 respecto del 2 es:

$$\vec{v}_{1|2}(t) = \vec{v}_{1|o}(t) + \vec{v}_{o|2}(t)$$
$$\vec{v}_{1|2}(t) = \vec{v}_{1|o}(t) - \vec{v}_{2|o}(t)$$

Como el móvil 1 realiza un MRU, su velocidad es:

$$\boxed{\vec{v}_{1|o}(t) = 12\,\mathrm{m/s}\ \breve{i}}$$

Por otro lado, el móvil 2 realiza un movimiento circular, por lo que su velocidad es:

$$\vec{v}_{2|o}(t) = \vec{\Omega}_2(t) \times \vec{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ x_2(t) & y_2(t) & 0 \end{vmatrix}$$

Si expresamos la posición del móvil 2 en función de coordenadas polares:

$$x_2(t) = r.\cos\theta(t) = 1m.\cos\theta(t)$$

$$y_2(t) = r.\sin\theta(t) = 1m.\sin\theta(t)$$

Además, como realiza un MCU:

$$\vec{\Omega}_2(t) = 2\,\mathrm{s}^{-1}\ \breve{k}$$

Por lo tanto su velocidad es:

$$\vec{v}_{2|o}(t) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 2\,\mathrm{s}^{-1}\ \breve{k} \\ 1m.\cos\theta(t) & 1m.\sin\theta(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_{2|o}(t) = -2\,\mathrm{m/s}.\sin\theta(t)\ \breve{i} + 2\,\mathrm{m/s}.\cos\theta(t)\ \breve{j}}$$

Entonces, la velocidad relativa de 1 respecto a 2 queda:

$$\vec{v}_{1|2}(t) = \vec{v}_{1|o}(t) - \vec{v}_{2|o}(t)$$

$$\vec{v}_{1|2}(t) = 12\,\mathrm{m/s}\ \breve{i} - [-2\,\mathrm{m/s}.\sin\theta(t)\ \breve{i} + 2\,\mathrm{m/s}.\cos\theta(t)\ \breve{j}]$$

$$\boxed{\vec{v}_{1|2}(t) = [12\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s}.\sin\theta(t)]\ \breve{i} - 2\,\mathrm{m/s}.\cos\theta(t)\ \breve{j}}$$

b)

La aceleración relativa se puede obtener de la siguiente manera:

$$\vec{a}_{1|2}(t) = \frac{d\vec{v}_{1|2}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}_{1|2}(t) = 2\,\mathrm{m/s}.\cos\theta(t).\frac{d\theta(t)}{dt}\ \check{i} + 2\,\mathrm{m/s}.\sin\theta(t).\frac{d\theta(t)}{dt}\ \check{j}$$

Como:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \Omega(t) = 2\,\mathrm{s}^{-1},$$

la aceleración relativa queda:

$$\boxed{\vec{a}_{1|2}(t) = 4\,\mathrm{m/s}^2.\cos\theta(t)\ \check{i} + 4\,\mathrm{m/s}^2.\sin\theta(t)\ \check{j}}$$

c)

Cuando el móvil 2 pasa por A, el ángulo que forma es:

$$\theta(t_A) = 90°$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}_{2|o}(t_A) = [12\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s}.\sin(90°)]\ \check{i} - 2\,\mathrm{m/s}.\cos 90°\ \check{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_{2|o}(t_A) = 14\,\mathrm{m/s}\ \check{i}}$$

Cuando pasa por B:

$$\theta(t_B) = -30°$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}_{2|o}(t_B) = [12\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s}.\sin(-30°)]\ \check{i} - 2\,\mathrm{m/s}.\cos(-30°)\ \check{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_{2|o}(t_A) = 11\,\mathrm{m/s}\ \check{i} - 1.732\,\mathrm{m/s}\ \check{j}}$$

d)

Si pensamos en la expresión de la aceleración en coordenadas intrínsecas, podemos observar que la aceleración tangencial del móvil 2 siempre es nula, ya que realiza un MCU, es decir, un movimiento circular con rapidez constante. Por lo tanto, el móvil 2 tendrá solo aceleración normal.

En el punto A, la aceleración normal apunta en la dirección $-\check{j}$:

$$\vec{a}_{2|o}(t_A) = \frac{|\vec{v}_2(t_A)|^2}{\rho} = \boxed{-4\,\mathrm{m/s^2}\ \check{j}}$$

Y finalmente:

$$\vec{a}_{2|1}(t_A) = \vec{a}_{2|o}(t_A) - \vec{a}_{1|o}(t_A) = \vec{a}_{2|o}(t_A) = \boxed{-4\,\mathrm{m/s^2}\ \check{j}}$$