ANÁLISIS MATEMÁTICO III

por Facundo Fernández

Desigualdad triangular: $z, w \in \mathbb{C}$

- $|z+w| \leq |z|+|w|$ • $|z-w| \geq ||z|-|w||$ • $|z+w| \geq ||z|-|w||$

Límites con el punto en infinito:

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}=0$
- $\lim\limits_{z\to \infty} f(z)=w_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=w_0$
- $\lim\limits_{z\to \infty} f(z)=\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)}=0$

Transformaciones: siendo $z(x,y)=x+i\ y \Longrightarrow f(z)=u(x,y)+i\ v(x,y)$:

- $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\ \frac{-y}{x^2+y^2}$ • $z^2=x^2-y^2+i\ 2xy$
- $\operatorname{sen}(z)=\operatorname{sen}(x)\cos(i\ y)+\cos(x)\operatorname{sen}(i\ y)=\operatorname{sen}(x)\cosh(y)+i\cos(x)\operatorname{senh}(y)$
- $\cos(z)=\cos(x)\cos(i\ y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(i\ y)=\cos(x)\cosh(y)-i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$
- $\operatorname{sen}(i\ y)=i\operatorname{senh}(y)$ • $\cos(i\ y)=\cosh(y)$
- $\operatorname{senh}(i\ y)=i\operatorname{sen}(y)$ • $\cosh(i\ y)=\cos(y)$
- $\cosh(z)=\cos(i\ x)\cos(y)+\operatorname{sen}(i\ x)\operatorname{sen}(y)=\cosh(x)\cos(y)+i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$
- $\operatorname{senh}(z)=\frac{1}{i}\operatorname{senh}(i\ z)=(-i)\left[\operatorname{sen}(i\ x)\cos(y)-\cos(i\ x)\operatorname{sen}(y)\right]$
- $\operatorname{senh}(z)=\operatorname{sen}(x)\cos(x)+i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$
- $e^z=e^x\left[cos(y)+i\operatorname{sen}(y)\right]=e^x\cos(y)+i\ e^x\operatorname{sen}(y)=\cosh(z)+\operatorname{senh}(z)$
- $\log(z)=\ln|z|+i\ [\operatorname{Arg}(z)+2k\pi] \longrightarrow$ función multiforme
- $z=|z|e^{i\varphi}=|z|[\cos(\varphi)+i\operatorname{sen}(\varphi)]$ • $\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}\ e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$

Ecuaciones de Cauchy - Riemann: $u_x=v_y \wedge u_y=-v_x$.
Derivabilidad: $f(z)=u(x,y)+i\ v(x,y)$ es derivable en z_0 si u,v son diferenciables y cumplen Cauchy - Riemann en z_0.
Holomorfía: $f(z)$ es Holomorfa en z_0 si $\exists\ f'(z)$ para z_0 y $\forall\ z\in \mathcal{E}nt(z_0):|z-z_0|<r$.
Funciones Armónicas:
u,v son armónicas conjugadas $\Longrightarrow \nabla^2 u=\nabla^2 v=0$ y cumplen Cauchy - Riemann.
u,v son armónicas conjugadas $\Longrightarrow [u+i\ v]$ ó $[v+i\ u]$ es Holomorfa, sólo una de ellas.
Potencial Complejo: $w(z)=\phi+i\psi$ tal que $\phi=K$ equipotenciales y $\psi=C$ líneas de campo.
Transformación Conforme: $f(z)\in\mathcal{H}ol \wedge f'(z)\neq 0 \Longrightarrow$ conserva los ángulos.
Problema de Dirichlet: $\exists$ única función que $\nabla^2=0$ y $h|_{\partial D_R}=\phi(x,y)$
Inversión: $f(z)=\frac{1}{z}$
Ecuación general de circunferencias y rectas de $\mathbb{R}^2$:

$$a(x^2+y^2)+b\ x+c\ y+d=0 \quad\longrightarrow\quad a+b\ u+c\ (-v)+d(u^2+v^2)=0$$

Si no depende de x o de $y \Longrightarrow u(x,y)=u(x)=\alpha x+\beta$
Las semirrectas unidas $\Longrightarrow u(x,y)=a\arctan(\frac{y}{x})+b$
Un valle entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} \Longrightarrow f(z)=\operatorname{sen}(z)$

Integración − parametrización: Si $C : z(t)$ tal que $t \in [a, b]$

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\ dt \qquad z'(t) \equiv \text{ Jacobiano}$$

Teorema de Cauchy − Goursat: $f(z) \in \mathcal{H}ol$ sobre y dentro de C (curva cerrada y simple),

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema de Cauchy − Goursat para recintos: $f(z) \in \mathcal{H}ol$ en R, $C \subset R$ (simple y cerrada),

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Corolarios:

- Si C no es simple también $\oint_C f(z)dz = 0$ (Se puede dividir en curvas cerradas simples).
- Si $f(z) \in \mathcal{H}ol$ en R (Recinto: abierto y conexo) $\Longrightarrow \exists\ F$ tal que $F' = f$.
- $F(z) \in \mathcal{H}ol\ \forall\ z \in R$.
- Si $f(z) \in \mathcal{H}ol\ \exists\ \infty$ primitivas.

Fórmula Integral de Cauchy (generalizada): Sea $f(x) \in \mathcal{H}ol$ en R, C curva cerrada simple $\subset R$ y z_0 en el interior de C,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz \quad \text{ó} \quad \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}_0$$

PROPIEDADES

• $\int_C z_0 f(z)\ dz = z_0 \int_C f(z)\ dz$ • $\int_c [f(z) + g(z)]\ dz = \int_C f(z)\ dz + \int_C g(z)\ dz$

• $\int_C |dz| = L_C \equiv$ Longitud de la curva C • $\int_C f(z)\ dz = -\int_{-C} f(z)\ dz$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_i} f(z)\ dz = \int_C f(z)\ dz$ donde los C_i son trozos que forman C

• $\left|\int_C f(z)\ dz\right| \leq \int_C |f(z)\ dz| = \int_C |f(z)|\ |dz|$

• Acotación ML $(M_C L_C)$: $\left|\int_C f(z)\ dz\right| \leq \int_C |f(z)|\ |dz| \leq M_C \int_C |dz| = M_C L_C = ML$

Si $f(z)$ es acotada en C tiene un máximo M_C en la curva C

• Condición necesaria de convergencia: Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Series: $f_n(z)$ **converge uniformemente** si la convergencia no depende de z. Resultados:

1) $f_n(z)$ es continua $\Longrightarrow S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es continua y holomorfa.
2) $f_n(z)$ es holomorfa y $g(z)$ es continua $\Longrightarrow \oint_C g(z)S(z)dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \oint_C g(z)f_n(z)dz.$
3) $f_n(z)$ es holomorfa $\Longrightarrow S'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(z).$

Serie de potencias: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Es única y converge unformemente por 1° lema de Abel y el criterio de Weierstrass.

Serie de Taylor: $f_n(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \longrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y $f(z) \in \mathcal{A}nal$

Serie de Laurent: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, converge en un anillo.

Serie Geométrica: $\boxed{\text{Si } |z|<1}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \vee \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\ (-1)^n = \frac{1}{1+z}$

Función	Serie	Desarrollo de la serie	Radio de convergencia
e^z	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$	si $\|z\| < \infty$
$\operatorname{sen} z$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots$	si $\|z\| < \infty$
$\cos z$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ z^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots$	si $\|z\| < \infty$
$\operatorname{senh} z$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots$	si $\|z\| < \infty$
$\cosh z$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \dots$	si $\|z\| < \infty$
$\ln z$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-1)^n}{n}$	$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$	si $\|z-1\| \leq 1$ y $z \neq 0$

Ceros de $f(z)$ analítica: z_0 es cero de orden k, entonces:

$$f(z_0) = 0,\ f^{(1)}(z_0) = 0,\ f^{(2)}(z_0) = 0,\ \dots,\ f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

•PROPIEDAD: Si $f(z) \in \mathcal{A}nal$ en $|z-z_0| < R$ de forma tal que z_0 es cero de orden k, entonces:

$$f(z) = (z-z_0)\Phi(z) \longrightarrow \Phi(z) \text{ es analítica y } z_0 \text{ es cero de orden } k$$

Singularidades: z_0 es singularidad de $f(z) \longrightarrow$ analizo con **DSL** (Desarrollo en Serie de Laurent)

$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Longrightarrow z_0$ es singularidad evitable $\Longrightarrow$ ningún término en la parte principal.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow z_0$ es un polo de orden $n \Longrightarrow$ cantidad finita de términos en la parte principal.

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \nexists \Longrightarrow z_0$ es singularidad esencial $\Longrightarrow$ infinitos términos en la parte principal.

Residuos: $f(z) \in \mathcal{H}ol$ dentro y sobre C salvo en una singularidad z_0 en el interior de C entonces se puede escribir su serie de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$. Si $C : |z - z_0| = R$

$$\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = b_1$$

Teorema de los residuos: $f(z) \in \mathcal{H}ol$ dentro y sobre C salvo en algunas singularidades $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el interior de C entonces

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

Cálculo de Residuos:

1) z_0 es singularidad evitable $\Longrightarrow \operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$.
2) z_0 es polo de orden $k \Longrightarrow \operatorname{Res}(f(z), z_0) = b_1$ ó $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim\limits_{n \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{(z-z_0)^k f(z)}{(k-1)!} \right]$.
3) z_0 es singularidad esencial $\Longrightarrow$ Sólo con b_1 de la serie de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$.

Residuo en el ∞: $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$.

• PROPIEDAD:

Si $f(z) \in \mathcal{A}nal\ \forall\ z \in \mathbb{C}^*$ salvo en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entonces $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right) + \operatorname{Res}\left(f(z), \infty\right) = 0$

Teorema del argumento: si $f(z) \in \mathcal{H}ol$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = C - P$$

donde C y P denotan el número de ceros y polos de $f(z)$, respectivamente, en el interior de C.

Integrales impropias

Valor Principal de Cauchy: $VPC = \lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx \neq \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ (a menos que converja)

• Condición necesaria de convergencia: Si $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Criterio de convergencia - Comparación: Si se conoce $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ o $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\, dx$ se analiza el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\text{Si } L = 0 \begin{cases} g \text{ es integrable} & \Longrightarrow \quad f \text{ es integrable} \\ f \text{ es divergente} & \Longrightarrow \quad g \text{ es divergente} \end{cases}$$

$$\text{Si } L = \infty \begin{cases} f \text{ es integrable} & \Longrightarrow \quad g \text{ es integrable} \\ g \text{ es divergente} & \Longrightarrow \quad f \text{ es divergente} \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{array}{c} L \neq 0 \\ L \neq \infty \end{array} \begin{cases} f \text{ es integrable} & \Longleftrightarrow \quad g \text{ es integrable} \\ f \text{ es divergente} & \Longleftrightarrow \quad g \text{ es divergente} \end{cases}$$

Función generalmente continua: $f(x) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(x)$ está acotada para todo $x \in [a,b]$
- $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades de salto

  (Hasta acá son funciones continuas a trozos)
- **Límites laterales**: Existe $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

Si $f(x)$ es generalmente continua entonces existe su Serie de Fourier.

Serie de Fourier de $f(x)$ – Trigonométrica: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$

Coeficientes a_0, a_n, b_n:
Si $f(x)$ es T periódica en $[\alpha, \alpha+T]$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\ dx \qquad a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\ dx$$

para $n \in \mathbb{N}$.
Si $f(x)$ es T periódica en centrada en $x=0$, entonces con $\alpha = -\frac{T}{2}$

Serie de Fourier de $f(x)$ – Exponencial: $S(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$

Coeficientes c_n:
Si $f(x)$ es T periódica en $[\alpha, \alpha+T]$

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\ dx \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

Si $f(x)$ es T periódica en centrada en $x=0$, entonces con $\alpha = -\frac{T}{2}$

Producto interno:
Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}$

$$\text{Si } \mathcal{C}_{\mathbb{R}}\left(\left[-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}\right]\right) \Longrightarrow \langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)\ dx$$

• Las funciones $\left\{1, \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base ortogonal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])$

Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ f \text{ es continua}\}$

$$\text{Si } \mathcal{C}_{\mathbb{C}}\left(\left[-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}\right]\right) \Longrightarrow \langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}\ dx$$

• Las funciones $\{\Phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{in\frac{2\pi}{T}x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman una base ortogonal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([a,b])$

Norma: $||f(x)||^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{f(x)}\ dx = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\ dx$

Lema de Riemann – Lebesgue: Condición necesaria para la convergencia de una serie de Fourier. Si f es una función periódica continua a trozos con coeficientes de Fourier a_n y b_n, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Si f es una función periódica continua a trozos con coeficientes de Fourier c_n, entonces:

$$\lim_{n\to-\infty} c_n = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

Teorema fundamental de las series de Fourier(**Convergencia puntual**): Sea $f(t)$ una función periódica suave a trozos en $\mathbb{R}$ con coeficientes de Fourier c_n. Entonces se tiene para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{N} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}\right] = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right]$$

Si $f(t)$ es continua entonces $f(t^+) = f(t^-)$ y el lado derecho es igual a $f(t)$.
Si $f(t)$ una función periódica suave a trozos en $\mathbb{R}$ con coeficientes de Fourier a_n y b_n, entonces se tiene para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right] = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right]$$

Si $f(t)$ es continua entonces $f(t^+) = f(t^-)$ y el lado derecho es igual a $f(t)$.

Teorema de convergencia uniforme: Si $f(x)$ es una función generalmente continua para todo $x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right)$ y $f'(x)$ es continua a trozos en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ entonces la serie de Fourier converge uniformemente a f en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

• Convergencia uniforme implica convergencia puntual.

• PROPIEDAD: Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergen, entonces la serie de Fourier converge uniformemente a una función continua en $\mathbb{R}$. VALE LA VUELTA.

Si $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y en un intervalo cerrado $[a,b]$ se tiene que $f(a) = f(b)$ entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente.

Función de cuadrado integrable: $f(x)$ es de cuadrado integrable en $[a,b]$ si $\int\limits_a^b |f(x)|^2\ dx < \infty$

Teorema de Parseval: Si $f(x)$ es una función de cuadrado integrable en $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ con la serie de Fourier $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$ entonces

$$||f(x)||^2 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right] \xrightarrow{\text{o también}} \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

Si $T=2\pi$

$$||f(x)||^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right] \xrightarrow{\text{o también}} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

Si $f(x)$ es una función de cuadrado integrable en $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ con la serie de Fourier $f(x) \approx \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$ entonces

$$||f(x)||^2 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = T\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\right] \xrightarrow{\text{o también}} \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Si $T=2\pi$

$$||f(x)||^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\right] \xrightarrow{\text{o también}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Extensión par: T es el período de $f(x):[0,T]\longrightarrow\mathbb{R} \Longrightarrow 2T$ es el período de $f_{\text{par}}(x)$.

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{2T}x\right) \longrightarrow f_{\text{par}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{\pi}{T}x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f_{\text{par}}(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{2T}x\right)\ dx \xrightarrow[f_{\text{par}}(x)=f(x)\text{ en }[0,T]]{\text{integrando}\to\text{par}} a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{T}x\right)\ dx$$

Extensión impar: T es el período de $f(x):[0,T]\longrightarrow\mathbb{R} \Longrightarrow 2T$ es el período de $f_{\text{impar}}(x)$.

$$f_{\text{impar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{2T}x\right) \longrightarrow f_{\text{impar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{T}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f_{\text{impar}}(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{2\pi}{2T}x\right)\ dx \xrightarrow[f_{\text{impar}}(x)=f(x)\text{ en }[0,T]]{\text{integrando}\to\text{par}} b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{T}x\right)\ dx$$

Función absolutamente integrable: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es absolutamente integrable en $(\mathbb{R})$ $(f \in L_1)$ si $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ dt < \infty$ existe como integral de Riemann impropia.

Transformada de Fourier: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y es absolutamente integrable.

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) \equiv F(\omega) \equiv \hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \text{con } \omega \in \mathbb{R}$$

Transformada inversa de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right](t) = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega$$

También se llama **Integral de Fourier**, si la misma existe.

Convolución: $(f * g)(t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau$

Lema de Riemann - Lebesgue: Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y continua a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = \lim_{\omega\to\pm\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt = 0$$

Identidad de Parseval: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\ d\omega$

Lema de Riemann – Lebesgue: Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y continua a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = \lim_{\omega\to\pm\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = 0$$

Valor principal de Cauchy: El valor de $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(t)dt$ es llamado el **Valor Pricipal de Cauchy** de la integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, si el límite existe.

Teorema fundamental de la integral de Fourier: Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y suave a trozos en $\mathbb{R}$ y sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de f. Entonces la integral de Fourier converge para cada $t \in \mathbb{R}$ como una valor principal de Cauchy y

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right]}$$

donde $f(t^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} f(t+h)$ y $f(t^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(t+h)$.

• Si $f(t)$ es una función continua, entonces el lado derecho de la igualdad es $f(t)$ porque en éste caso $f(t^+) = f(t^-)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Transformada coseno de Fourier: Si $f(t)$ es par su transformada es

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\ dt - i \cancel{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ dt} = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\ dt$$

$$\xrightarrow[\text{Fourier de } f(t) \text{ par}]{\text{Transformada coseno de}} \boxed{F_c(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\ dt} \Longrightarrow F(\omega) = 2F_c(\omega)$$

Transformada seno de Fourier: Si $g(t)$ es impar su transformada es

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\ dt = \cancel{\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\omega t)\ dt} - i \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ dt = -2i\int\limits_{0}^{\infty} g(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ dt$$

$$\xrightarrow[\text{Fourier de } g(t) \text{ impar}]{\text{Transformada seno de}} \boxed{G_s(\omega) = \int\limits_{0}^{\infty} g(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ dt} \Longrightarrow G(\omega) = -2iG_s(\omega)$$

Teorema fundamental de funciones pares: $[e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t)\ d\omega = 2\int\limits_{0}^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t)\ d\omega = 4\int\limits_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos(\omega t)\ d\omega$$

$$\xrightarrow[\text{para funciones pares}]{\text{Teorema Funadamental}} \boxed{\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos(\omega t)\ d\omega = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right]}$$

Teorema fundamental de funciones impares: $[e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ d\omega = 2i\int\limits_{0}^{\infty} G(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ d\omega = 4\int\limits_{0}^{\infty} G_s(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ d\omega$$

$$\xrightarrow[\text{para funciones impares}]{\text{Teorema Funadamental}} \boxed{\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} G_s(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\ d\omega = \frac{1}{2}\left[g(t^+) + g(t^-)\right]}$$

•INTEGRACIÓN POR PARTES: Elegir la parte del integrando a derivar y la parte del integrando a integrar. No olvidar colocar los signos comenzando por $+$ y alternando con $-$. Se multiplican las diagonales y se suman los términos definidos por esos productos.

Caso 1: Detenerse cuando la columna de derivadas D se llega a 0.

$$\int_a^b x^2 \operatorname{sen}(3x)\ dx = +\left[x^2\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)\right]_a^b - \left[2x\left(-\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^2}\right)\right]_a^b + \left[2\left(\frac{\cos(3x)}{3^3}\right)\right]_a^b$$

$$\xrightarrow{\text{indefinida}} \int x^2 \operatorname{sen}(3x)\ dx = +\left[x^2\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)\right] - \left[2x\left(-\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^2}\right)\right] + \left[2\left(\frac{\cos(3x)}{3^3}\right)\right]$$

	D	I
$+$	x^2	$\operatorname{sen}(3x)$
$-$	$2x$	$-\dfrac{\cos(3x)}{3}$
$+$	2	$-\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3^2}$
$-$	0	$\dfrac{\cos(3x)}{3^3}$

Caso 2: Detenerse cuando se puede integrar una fila de la tabla.

$$\int_a^b x^4 \ln(x)\ dx = +\left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}\frac{x^5}{5}\ dx = \left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right]_a^b - \frac{1}{5}\int_a^b x^4\ dx \Longrightarrow \left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right]_a^b - \left[\frac{x^5}{25}\right]_a^b$$

$$\xrightarrow{\text{indefinida}} \int x^4 \ln(x)\ dx = +\left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right] - \int \frac{1}{x}\frac{x^5}{5}\ dx = \left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right] - \frac{1}{5}\int x^4\ dx \Longrightarrow \left[\ln(x)\frac{x^5}{5}\right] - \left[\frac{x^5}{25}\right]$$

	D	I
$+$	$\ln(x)$	x^4
$-$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{x^5}{5}$

Caso 3: Detenerse cuando una fila es múltiplo de la primera.

$$\int_a^b \operatorname{sen}(at)e^{-ut}\ dt = +\left[-\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u}\right]_a^b - \left[a\cos(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\right]_a^b + \int_a^b -a^2\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\ dt$$

$$\left(1+\frac{a^2}{u^2}\right)\int_a^b \operatorname{sen}(at)e^{-ut}\ dt = -\left[\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u}\right]_a^b - \left[a\cos(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\right]_a^b$$

$$\xrightarrow{\text{indefinida}} \int \operatorname{sen}(at)e^{-ut}\ dt = +\left[-\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u}\right] - \left[a\cos(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\right] + \int -a^2\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\ dt$$

$$\left(1+\frac{a^2}{u^2}\right)\int \operatorname{sen}(at)e^{-ut}\ dt = -\left[\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-ut}}{u}\right] - \left[a\cos(at)\frac{e^{-ut}}{u^2}\right]$$

Solo falta dividir a ambos lados por $\left(1+a^2/u^2\right)$.

	D	I
$+$	$\operatorname{sen}(at)$	e^{-ut}
$-$	$a\cos(at)$	$-\dfrac{e^{-ut}}{u}$
$+$	$-a^2\operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{e^{-ut}}{u^2}$

•PROPIEDADES DE TRASFORMADA DE FOURIER:

no.	$f(t), g(t)$	$F(\omega), G(\omega)$	Condiciones
1	$a\ f(t) + b\ g(t)$	$a\ F(\omega) + b\ G(\omega)$	$a, b \in \mathbb{C}$
2	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$	
3	$f(t-a)$	$e^{-i\omega a}F(\omega)$	$a \in \mathbb{R}$
4	$e^{iat}f(t)$	$F(\omega - a)$	$a \in \mathbb{R}$
5	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
6	$f(t)$ par y real	$F(\omega)$ par y real	
7	$f(t)$ impar y real	$F(\omega)$ impar e imaginaria	
8	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	
9	$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$	
10	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\ d\tau$	$\frac{F(\omega)}{i\omega}$	$F(0) = 0$
11	$F(-t)$	$2\pi f(\omega)$	
12	$(f * g)(t)$	$F(\omega)G(\omega)$	
13	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$	

•TRASFORMADAS DE FOURIER:

no.	$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$	Condiciones
1	$\begin{cases} 1 \text{ si } \lvert t\rvert \leq a \\ 0 \text{ si } \lvert t\rvert > a \end{cases}$	$2a\frac{\text{sen}(a\omega)}{a\omega}$	$a > 0$
2	$\begin{cases} \lvert t\rvert \text{ si } \lvert t\rvert \leq a \\ 0 \text{ si } \lvert t\rvert > a \end{cases}$	$2a^2\ \frac{\text{sen}(a\omega)}{a\omega} - a^2\ \frac{sen^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2}$	$a > 0$
3	$\frac{\text{sen}(at)}{t}$	$\begin{cases} \pi \text{ si } \lvert\omega\rvert \leq a \\ 0 \text{ si } \lvert\omega\rvert > a \end{cases}$	$a > 0$
4	$\begin{cases} 1 - \dfrac{\lvert t\rvert}{a} \text{ si } \lvert t\rvert \leq a \\ 0 \text{ si } \lvert t\rvert > a \end{cases}$	$\frac{4\,\text{sen}^2\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$	$a > 0$
5	$\frac{\text{sen}^2(at)}{t^2}$	$\begin{cases} \pi a\left[1 - \dfrac{\lvert\omega\rvert}{2a}\right] \text{ si } \lvert\omega\rvert \leq 2a \\ 0 \text{ si } \lvert\omega\rvert > 2a \end{cases}$	$a > 0$
6	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a > 0$
7	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert w\rvert}$	$a > 0$
8	$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{a+i\omega}$	$\text{Re}(a) > 0, b \in \mathbb{R}$
9	$t\ e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^2}$	$\text{Re}(a) > 0, b \in \mathbb{R}$
10	$e^{-at}\,\text{sen}(bt)H(t)$	$\frac{b}{(a+i\omega)^2+b^2}$	$\text{Re}(a) > 0$
11	$e^{-at}\cos(bt)H(t)$	$\frac{a+i\omega}{(a+i\omega)^2+b^2}$	$\text{Re}(a) > 0$
12	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$	$a > 0$

Función causal: Sea $f(t)$ una función continua. f es una función causal si $f(t)=0$ para $t<0$.
Función de orden exponencial
La función causal $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ es de orden exponencial si existen $\alpha\in\mathbb{R}$ y $M>0$ tales que $|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$ para todo $t\geq 0$
Transformada de Laplace: $f:[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ y es de orden exponencial.

$$\mathcal{L}\left[f(t)H(t)\right](s)=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\oint_{a-i\beta}^{a+i\beta}F(s)e^{st}ds,\text{ donde } a=\mathrm{Re}(s)$$

•PROPIEDADES DE TRASFORMADA DE LAPLACE:

no.	$f(t)$, $g(t)$	$F(s)$, $G(s)$	Condiciones
1	$a\ f(t)+b\ g(t)$	$a\ F(s)+b\ G(s)$	$a,b\in\mathbb{C}$
2	$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$a\geq 0$
3	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$a\in\mathbb{C}$
4	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a>0$
5	$f'(t)$	$s\ F(s)-f(0^+)$	
6	$f''(t)$	$s^2F(s)-s\ f(0^+)-f'(0^+)$	
7	$(-1)^n\ t^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$	
8	$\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	
9	$(f*g)(t)$	$F(s)\ G(s)$	
10	$f(t)$	$\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\ dt}{1-e^{-st}}$	$f(t+T)=f(t)$
11	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u)\ du$	

•TRANSFORMADAS DE LAPLACE:

no.	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)$ $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Semiplano de convergencia	Condiciones
1	$1\ H(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(s)>a$	$a\in\mathbb{C}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	
4	$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$a\in\mathbb{R}$
5	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$a\in\mathbb{R}$
6	$\mathrm{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>a$	$a\in\mathbb{R}$
7	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>a$	$a\in\mathbb{R}$
8	$\mathrm{sen}(at+b)$	$\frac{a\cos(b)+s\,\mathrm{sen}(b)}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$a,b\in\mathbb{R}$
9	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\,\mathrm{sen}(b)}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$a,b\in\mathbb{R}$
10	$t^n\ e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(-a)$	$a\in\mathbb{C}$
11	$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$a>0$