Universidad de Buenos Aires
Facultad De Ingeniera
Año 2011 - 2$^{\text{do}}$ Cuatrimestre

Análisis Matemático III (61.10)

Resumen de la cursada

INTEGRANTES:
Menendez, Martin - #92830
<Menendez91@live.com.ar>

Índice

Parte I
Análisis Complejo

1. Números Complejos

Los números complejos se definen : $\mathbb{C} : \{Z = (X, Y)/X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}\}$ y son de la forma $\boxed{Z = X + i.Y}$, de forma tal que :
Donde $X = Re(Z)$ e $Y = Im(Z)$ son la parte **Real** e **Imaginaria** de un complejo, respectivamente. i es la **Unidad Imaginaria** que cumple $i^2 = -1$.Debido a esto último $\mathbb{C}$ NO tiene operaciones de ORDEN.(Si $i > 0 \Rightarrow i.i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$ Absurdo)

Un número $\varphi \in \mathbb{R}$ es un **Argumento** de $Z \in \mathbb{C}$ si
$X = |Z|Cos(\varphi)$, $Y = |Z|Sen(\varphi) \Rightarrow \boxed{Z = X + i.Y = |Z|(Cos(\varphi) + i.Sen(\varphi))}$
Entonces $\varphi + 2K\pi$ es un argumento de Z $\forall K \in \mathbb{Z}$ y definimos :
$\boxed{Arg(Z) = \{\varphi + 2K\pi/K \in \mathbb{Z}\}}$.

$\mathbb{C}$ es un cuerpo NO ordenado, un espacio vectorial Complejo de Dimensión 1 y un espacio vectorial Real isomorfo a $\mathbb{R}^{\not{2}}$.

Podemos definir $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0$ y se cumple la igualdad $\longleftrightarrow Z = 0$.
$|\lambda Z| = |\lambda||Z|$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\forall Z \in \mathbb{C}$
$|Z + W| \leq |Z| + |W|$ $\forall Z, W \in \mathbb{C}$
$d(Z, W) = |Z - W|$ Con la distancia puedo comparar, buscar diferencias, trazar entornos.

2. Definición de puntos

- **Disco abierto** de centro Z_0 y radio $r > 0$: $D_{(Z_0,r)} = \{Z_0 \in \mathbb{C}/|Z - Z_0| < r\}$.
- Un **Entorno** de un punto $Z_0 \in \mathbb{C}$ es un conjunto $U/\exists r > 0/D_{(Z_0,r)} \subset U$.
- Dado un conjunto de $A \in \mathbb{C} \Rightarrow Z_0$ es **interior** si A es un entorno de Z_0 o si $\exists r > 0/D_{(Z_0,r)} \subset A$.
- Si todo punto es interior $\Rightarrow$ A es un **Conjunto Abierto**.
- Z_0 es un **Punto Exterior** de A si es interior a $c_A = \mathbb{C} - A = \bar{A}$, ($\bar{A}$ es el complemento de A).
- Z_0 es un **Punto Aislado** de A si $Z_0 \in A, \exists r > 0/D_{(Z_0,r)} \cap A = \{Z_0\}$.
- Z_0 es **Adherente** a $A \leftrightarrow \forall r > 0, D_{(Z_0,r)} \cap A \neq 0$.
- Como notación : $D`_{(Z_0,r)} = D_{(Z_0,r)} - Z_0$ donde $D`$ es un **Disco Perforado**.
- Z_0 es un **Punto de Acumulación** de A si $\forall r > 0, D`_{(Z_0,r)} \cap \neq 0$.
- Z_0 es un **Punto Frontera** de A si todo entorno de Z_0 contiene puntos de A y de su complemento $\bar{A}$.
- A es un **Conjunto Cerrado** si contiene a sus puntos de acumulación y a todos sus puntos fronteras. También se acepta como definición si
- $\bar{A}$ es un Conjunto Abierto.
- A es un **Conjunto Acotado** ($A \subseteq \mathbb{C}$) si $\exists r > 0/A \subseteq \{Z/|Z| \leq r\}$ es decir $\forall Z \in \mathbb{A} : |Z| \leq r$.
- Un conjunto Cerrado y Acotado se denomina **Compacto**.

3. Funciones Complejas en $\mathbb{C}$

Definimos $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$Z \longrightarrow W = f(Z)$
$Z = X + i.Y \longrightarrow W = U + i.V$

$$\boxed{f(Z) = \underbrace{U(X,Y)}_{Re(f(Z))} + i.\underbrace{V(X,Y)}_{Im(f(Z))}}$$

3.1. Límite de una función

Si $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Z_0$ punto de acumulaciónde A, $L \in \mathbb{C}$, se dice que:

$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = L$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/$ si $Z \in A$ y $0 < |Z - Z_0| < \delta \Rightarrow |f(Z) - L| < \epsilon$

Observar que si $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Z_0$ punto de acumulación de A, $L \in \mathbb{C}$.

$Z = X + i.Y$, $Z_0 = X_0 + i.Y_0(Acum(A)) \Rightarrow L = L_1 + i.L_2$ es el límite de $f(Z)$ cuando $Z \to Z_0$.

$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = L \longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/$ si $Z = X + i.Y \in A$ y

$$0 < \underbrace{\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}}_{|Z - Z_0|} < \delta \Rightarrow 0 < \sqrt{(V(X,Y) - L_1)^2 + (U(X,Y) - L_2)^2} < \epsilon$$

Entonces podemos escribir $\lim_{(X,Y) \to (X_0,Y_0)} U(X,Y) = L_1$ y $\lim_{(X,Y) \to (X_0,Y_0)} V(X,Y) = L_2$.

Se cumplen las propiedades de límites análogas de los Reales (suma,resta,multiplicación y división de límites y regla de la cadena).

3.2. Continuidad de una función

Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Z_0 \in A.f$ es **continua** en Z_0 si :
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/$ si $Z \in A$ y $\underbrace{0 < |Z - Z_0| < \delta}_{Sicambiapocodeentrada} \Rightarrow \underbrace{0 < |f(Z) - f(Z_0)| < \epsilon}_{cambiapocodesalida}$.(Aún si Z_0 es un punto aislado).
Si Z_0 es punto de acumulación e $A \Rightarrow f$ es continua en $Z_0 \leftrightarrow \lim_{Z \to Z_0} f(Z) = f(Z_0)$.
Resulta: $f(Z) = U(X,Y) + i.V(X,Y)$ *es continua en* $Z_0 = X_0 + i.Y_0 \leftrightarrow U(X,Y)$ *es continua en* (X_0, Y_0) *y* $V(X,Y)$ *es continua en* (X_0, Y_0).

3.3. Derivada de una función

Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Z_0$ punto interior de A.
f es **derivable** en Z_0 si $\exists \lim_{Z \to Z_0} \dfrac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0} = f'(Z_0)$

Valen las reglas de derivación que se aplicaban en Reales.

Observar:
$f(Z) = U(X,Y) + i.V(X,Y) \Rightarrow$
$\triangle f = f(Z) - f(Z_0) = (U(X,Y) - U(X_0,Y_0)) + i.(V(X,Y) - V(X_0,Y_0)) = \triangle U + i.\triangle V$ **(1)**
$\triangle Z = Z - Z_0 \Rightarrow Z = Z_0 + \triangle Z$ **(2)**

Podemos reemplazar **(2)** en $\lim_{Z \to Z_0} \dfrac{f(Z) - f(Z_0)}{Z - Z_0} = f'(Z_0)$ y obtener :

$\lim\limits_{\triangle Z\to 0}\dfrac{f(Z_0+\triangle Z)-f(Z_0)}{\triangle Z}=f'(Z_0)$ e incluso $\lim\limits_{\triangle Z\to 0}\dfrac{\triangle f}{\triangle Z}=a+i.b$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

Partiendo de esta expresión y reemplazando **(1)** se obtiene:

$$\lim_{\triangle Z\to 0}\frac{\triangle U+i.\triangle V}{\triangle Z}=a+i.b\Rightarrow\lim_{\triangle Z\to 0}\frac{(\triangle U+i.\triangle V)-(a+i.b)\triangle Z}{\triangle Z}=0.$$

Reemplazando $\triangle Z=Z-Z_0=(X+i.Y)-(X_0-i.Y_0)=\underbrace{(X-X_0)}_{\triangle X}+i.\underbrace{(Y-Y_0)}_{\triangle Y}$

$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}\frac{(\triangle U+i.\triangle V)-(a+i.b)(\triangle X+i\triangle Y)}{\triangle X+i.\triangle Y}=0\Longrightarrow$$
$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}\frac{(\triangle U+i.\triangle V)-[(a\triangle X-b\triangle Y)+i.(b\triangle X+a\triangle Y)]}{\triangle X+i\triangle Y}=0\Longrightarrow$$
$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}\frac{\triangle U-a\triangle X+b\triangle Y+i.(\triangle V-b\triangle X-a\triangle Y)}{\triangle X+i\triangle Y}=0\Longrightarrow$$

Si esto tiene a "0", entonces su módulo también tiende a "0".

$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}|\frac{\triangle U-a\triangle X+b\triangle Y+i.(\triangle V-b\triangle X-a\triangle Y)}{\triangle X+i\triangle Y}|=0\Longrightarrow$$
$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}\frac{|\triangle U-a\triangle X+b\triangle Y+i.(\triangle V-b\triangle X-a\triangle Y)|}{\sqrt{\triangle X^2+i\triangle Y^2}}=0\Longrightarrow$$
$$\lim_{\triangle X+i\triangle Y\to 0}|\frac{\triangle U-(a\triangle X-b\triangle Y)}{\sqrt{\triangle X^2+i\triangle Y^2}}+i\frac{\triangle V-(b\triangle X+a\triangle Y)}{\sqrt{\triangle X^2+i\triangle Y^2}}|=0\Longrightarrow.$$

Ambos términos en el módulo tienden a "0", ademas:

$a=\frac{\partial U}{\partial X}(X_0,Y_0)$,$-b=\frac{\partial U}{\partial Y}(X_0,Y_0)$,$a=\frac{\partial V}{\partial Y}(X_0,Y_0)$,$b=\frac{\partial V}{\partial X}(X_0,Y_0)$.

De donde obtenemos las **Condiciones de Cauchy-Riemman**:

$\boxed{\dfrac{\partial U}{\partial X}(X_0,Y_0)=\dfrac{\partial V}{\partial Y}(X_0,Y_0)}$ y $\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial X}(X_0,Y_0)=-\dfrac{\partial U}{\partial Y}(X_0,Y_0)}$

$f'(Z_0)=\frac{\partial U}{\partial X}(X_0,Y_0)+i.\frac{\partial V}{\partial X}(X_0,Y_0)$.

3.4. Holomorfía de una función

$f(Z)$ es **holomorfa** en $Z_0\longleftrightarrow\exists r>0/\forall Z\in D_{(Z_0,r)}\exists f'(Z)$.Es decir, la función debe admitir derivada en un entorno de Z_0. Entonces tenemos la siguiente implicacón $f(Z)$ holofomorfa $\Longrightarrow f(Z)$ derivable en Z_0 (la vuelta NO es cierta, contraejeplo $|Z|^2$ es derivable en $Z_0=0$ pero no es holomorfa,(0,0) es un punto, no un entorno).

En consecuencia : Si $A\subset\mathbb{C}$ es abierto y $f(Z)$ es derivable en $A\Longrightarrow f(Z)$ es holomorfa en todos los puntos de A ("f es holomorfa en A", $f(Z)\in H(A)$").Si A es abierto entonces es un entorno de cada punto.

$H(A)=\{f(Z):A\to\mathbb{C}/f(Z)$ es holomorfa en A$\}$

Si además de ser holomorfa, $f'(Z_0)\neq 0$ entonces la función $f(Z)$ se llama **Conforme** y preserva caminos suaves y ángulos entre caminos en magnitud y sentido.

Recordar:Un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$ se llamará dominio o región abierta.Una región es la unión de un conjunto abierto y conexo con todos/algunos/ninguno de sus puntos frontera.Si D es abierto y conexo en $\mathbb{R}^{\not\approx}$ y $f(Z)$ es diferenciable en

$\mathbb{R}^{\not\leq}/f_X = f_Y = 0 \ en \ D \Rightarrow f(Z) = cte \ en \ D.$

- Si $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo ($D \neq 0$) y $f(Z)$ es holomorfa en $D/f`(Z) = 0 \forall Z \in D \rightarrow f(Z) = cte$ en D.

  Demostración: $f(Z) = U(X,Y) + i.V(X,Y)/f'(Z) = 0 \forall Z \in D \Rightarrow f'(Z) = U_x + i.V_x = 0 \forall (X,Y) \in D \Rightarrow$
  Aplicando *Cauchy-Riemman*:$U_x = V_y = 0$ y $V_x = -U_y = 0 = U_y$.Por lo que $U(X,Y)$ y $V(X,Y)$ son diferenciables en D que es abierto y conexo, sus derivadas parciales son nulas, entonces $U(X,Y) = \alpha$ y $V(X,Y) = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  Finalmente $f(Z) = \alpha + i.\beta$ es una función constante.

- Si $f(Z) \in H(D)$ y $\bar{f}(Z) \in H(D) \Rightarrow f(Z) = cte$ en D.

  Demostración: Se cumplen simultaneamente los siguientes sistemas (por *Cauchy-Riemman*):

  $\left\{ \begin{matrix} U_x = V_y \\ U_x = -V_y \end{matrix} \right\} \Rightarrow V_y = -V_y \forall (X,Y) \in D \Rightarrow V_y \equiv 0 \Rightarrow U_x \equiv 0$ en D.
  $\left\{ \begin{matrix} U_y = -V_x \\ U_y = -(-V_x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow -V_x = V_x \forall (X,Y) \in D \Rightarrow V_x \equiv 0 \Rightarrow U_x y \equiv 0$ en D.
  $\therefore f'(Z) \equiv 0$ en D abierto y conexo $\Rightarrow f(Z) = cte$.

- Si D es abierto y conexo, $f(Z) \in H(D)/Im(f(Z)) = cte$ en $D \Rightarrow f(Z) = cte$ en D.

  Demostración: $f(Z) = U(X,Y) + i.K, K = cte \in \mathbb{R}$. $V_y = V_x = 0$ y por las condiciones de *Cauchy-Riemman* $V_y = U_x = 0$ y $V_x = -U_y = 0 = U_y$. Por lo tanto $U(X,Y) = C \Rightarrow f(Z) = C + i.K = cte$.
  (La demostración es análoga en el caso de $Re(f(Z)) = cte$)

3.5. Punto del infinito y Plano Complejo Ampliado

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es el plano complejo ampliado,y podemos extender la noción de límite :

$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = \infty$ si $\forall k > 0 \exists \delta > 0/$ si $0 < |Z - Z_0| < \delta, Z \in A \Rightarrow |f(Z)| > k$

3.6. Logaritmos Complejo

Si $Z \neq 0$, $\boxed{Log(Z) = Ln(|Z|) + i.arg(Z)}$ es una función multivaluada según la determinación del argumento.$\alpha < arg(Z) \leq \alpha + 2\pi$.

Una **Rama de Logaritmo** en un conjunto D es una función continua $f(Z)$ definida en $D/e^{f(Z)} = Z$ en D.

$f(Z) = Z^n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2.$

$D_n = \{Z/k\frac{2\pi}{n} \leq arg(Z) \leq (k+1)\frac{2\pi}{n}\}; k = 0, ..., n-1.$

$Z^n = |Z|^n.Cis(n\varphi) \Rightarrow k2\pi \leq n\varphi \leq (k+1)2\pi$

$W = Z^n \Rightarrow W_k = \sqrt[n]{|W|}Cis(\frac{\varphi + k2\pi}{n}), 0 \leq \varphi \leq n; k = 0, ..., n-1$

Podemos definir para $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{C} : \alpha^{\beta} = e^{\beta.Log(\alpha)}$

3.7. Funciones trigonométricas

$$Cos(Z) = \frac{e^{i.Z} + e^{-i.Z}}{2} = Cos(X)Cosh(Y) - Sen(X)Senh(Y)$$
$$Cosh(Z) = \frac{e^{Z} + e^{-Z}}{2} = Cosh(X)Cos(Y) + i.Senh(X)Sen(Y)$$
$$Cos(i.Z) = Cosh(Z)$$

$$Sen(Z) = \frac{e^{i.Z} - e^{-i.Z}}{2i} = Sen(x)Cosh(Y) + iCos(X)Senh(Y)$$
$$Senh(Z) = \frac{e^{Z} - e^{-Z}}{2} = Senh(X)Cos(Y) + iCosh(X)Sen(Y)$$
$$Sen(i.Z) = iSenh(Z)$$

3.8. Funciones Armónicas

Si $f(Z) \in H(D)$, D abierto y conexo, $f(Z) = f(X,Y) = U(X,Y) + i.V(X,Y)$ con $U(X,Y), V(X,Y)$ derivables 2 veces. Aplicando las condiciones de *Cauchy-Riemman*:

$U_{xx} = V_{yx}$
$+$
$U_{yy} = -V_{xy}$
$------$
$U_{xx} + U_{yy} = V_{yx} - V_{xy} = 0 \Rightarrow \bigtriangledown^2 U(X,Y) = 0$ El laplaciano de $U(X,Y) = 0$.

Análogamente:

$V_{yy} = U_{xy}$
$-$
$-V_{xx} = U_{yx}$
$------$
$V_{yy} + V_{xx} = U_{xy} - U_{yx} = 0 \Rightarrow \bigtriangledown^2 V(X,Y) = 0$ El laplaciano de $V(X,Y) = 0$.

Si D región abierta simplemente conexa, $U(X,Y) \in D \Rightarrow \exists V(X,Y)$ conjugada armónica en $D \Rightarrow \exists V(X,Y)/U(X,Y) + i.V(X,Y) \in H(D)$.

4. Problema de Dirichlet

Consiste en encontrar una función armónica en el interior de una región D de manera que en su frontera tome valores prefijados. Si c es un contorno cerrado, y $D = c \cup int(c) \Rightarrow$ si $\exists$ solución al *Problema de Dirichlet* en D, la solución es <u>única</u>.

Ejemplos:

1. La región esta delimitada por $V = b_1$ e $V = b_2$ con $b_2 > b_1$, se tiene que $H(U, b_1) = c_1$ y $H(U, b_2) = c_2$, $\bigtriangledown^2 H(U,V) = 0$ en el interior de la región.

   Entonces la función solo depende de V, por lo que $\bigtriangledown^2 H(U,V) = H_{uu} + H_{vv} = H_{vv} = 0 \Rightarrow$ $H(U,V) = G(V) \Rightarrow$
   $G(V) = K_1.V + K_2$ y debe cumplir lo siguiente:

$G(b_1) = K_1.b_1 + K_2 = c_1$
$G(b_2) = K_1.b_2 + K_2 = c_2$

$c_2 - c_1 = K_1(b_2 - b_1) \Rightarrow K_1 = \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}$ Reemplazando en cualquiera de las anteriores se obtiene:

$K_2 = c_1 - K_1.b_1 \Rightarrow K_2 = c_1 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}b_1$

Finalmente $G(V) = \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}V + c_1 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}b_1 = \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(V - b_1) + c_1$

$H(U,V) = \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(V - b_1) + c_1$ es la función buscada que resuelve el *Problema de Dirichlet.*

2. La región esta delimitada por φ_1 y $\varphi_2.H(r,\varphi_1) = c_1$ y $H(r,\varphi_2) = c_2.\bigtriangledown^2 H(r,\varphi) = 0$, con $r > 0, \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$.

   Esta vez tenemos que emplear el Laplaciano en polares:
   $\bigtriangledown^2 H(r,\varphi) = H_{rr} + \frac{1}{r}H_r + \frac{1}{r^2}H_{\varphi\varphi} = 0$
   Como solo depende de $\varphi \Rightarrow H(\varphi) = K_1\varphi + K_2$

   $H(\varphi_1) = K_1.\varphi_1 + K_2 = c_1$
   $H(\varphi_2) = K_1.\varphi_2 + K_2 = c_2$

   $K_1 = \frac{c_2-c_1}{\varphi_2-\varphi_1}$ y $K_2 = c_1 - \frac{c_2-c_1}{\varphi_2-\varphi_1}\varphi_1$

   $H(r,\varphi) = \frac{c_2-c_1}{\varphi_2-\varphi_1}(\varphi - \varphi_1) + c_1$ es la función buscada que resuelve el *Problema de Dirichlet.*

5. Flujos en variable compleja

Sea $V(Z) = P(X,Y) + i.Q(X,Y)$, con $Z \in \mathbb{G}$, región simplemente conexa de $\mathbb{C}$,sin fuentes ni sumideros

$\Rightarrow \vec{\bigtriangledown} V = div(V) = 0$,e iirotacional $\Rightarrow rot(P,Q,0) = 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial Q}{\partial X}(X,Y) = \frac{\partial P}{\partial Y}(X,Y) \Rightarrow \exists \varphi / \bigtriangledown \varphi = V \Rightarrow \varphi_x = P, \varphi_y = Q$

$\bigtriangledown^2 \varphi = 0 \longrightarrow \varphi$ es armónica en $\mathbb{G}$, región simplemente conexa $\Rightarrow \exists \psi$ armónico en $\mathbb{G}$,

conjugada armónica de $\varphi / W(Z) = \varphi(X,Y) + i.\psi(X,Y) \in H(G)$

$W'(Z) = \varphi_x + i.\psi_x = \varphi_x - i.\varphi_y = P(X,Y) - i.Q(X,Y) = \bar{V}(Z)$.

Definimos **Potencial Complejo** como $W(Z) = \varphi(X,Y) + i.\psi(X,Y)$. donde $\varphi(X,Y)$ es la **Función Potencial** cuyas líneas equipotenciales son $\varphi(X,Y) = cte$; y $\psi(X,Y)$ es la **Función de Corriente** cuys líneas de corriente son $\psi(X,Y) = cte$.

6. Integrales de funciones complejas

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, c = \gamma([a,b])$ y $f(Z)$ una función compleja y continua en los puntos de la curva.

$$\boxed{\int_c f(Z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}$$

<u>*Observación:*</u>*Se puede probar que esta definición es independiente de las reparametrizaciones equivalentes*

a γ (equivalentes implica que preserva el sentido).

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo.$f(Z)$ continua en A, si $\exists$ una función $F(Z)/F'(Z) = f(Z) \forall Z \in A$. $F(Z)$ se llama Primitiva de $f(Z)$ en A y $F \in H(A)$.

6.1. Teorema de Cauchy-Goursat

Si D es una región abierta, simplemente conexa. $c \subset D$ es un contorno cerrado.
$f(Z) \in H(D) \Rightarrow \int_c f(Z)dZ = 0$
El teorema clásico de Cauchy añadía la hipótesis $f'(Z)$ es continua en D. Goursat demostró que no era necesaria tal afirmación.

Como demostración del Teorema de Cauchy:
$f(Z) \in H(D)$ con hipótesis $f'(Z)$ continua. c contorno cerrado contenido en D
$\displaystyle\int_{c+} f(Z)dZ = \int_{c+} (U(X,Y)+i.V(X,Y))(dX+i.dY) = \int_{c+} (U(X,Y)dX - V(X,Y)dY) + i\int_{c+} V(X,Y)dX + U(X,Y)dY \Longrightarrow$
Solo la parte Real: $\displaystyle\int_{c+} (U(X,Y)dX - V(X,Y)dY)$ por el Teorema de Green:
$\displaystyle\int\int_{\gamma} (-V_x - U_y)dXdY = \int\int_{\gamma} (-V_x + V_x)dXdY = 0$
Análogamente para la parte Imaginaria $\displaystyle\int_{c+} V(X,Y)dX + U(X,Y)dY = 0$
$\displaystyle\therefore \int_{c+} f(Z)dZ$ (Se empleo $f'(Z)$ continua, Goursat lo logra sin eso).

6.2. Fórmula integral de Cauchy

Sea D una región simplemente conexa. $c \in D$ contorno cerrado, orientada en sentio antihorario.
$f(Z) \in H(D) \Longrightarrow \forall a \in Int(c) \Rightarrow \boxed{f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c+} \frac{f(Z)}{Z-a}dZ}$
Agregando $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \exists$ $\boxed{f^{(n)}_{(a)} = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{c+} \frac{f(Z)}{(z-a)^{n+1}}dZ}$ tenemos la *Fórmula integral de Cauchy Generalizada.*

6.3. Teorema de Morera

Si D es un abierto y conexo, $f(Z)$ continua en $D/ \int_{c+} f(Z)dZ = 0\ \forall c$ cerrado. $c \subset D \Rightarrow f(Z) \in H(D)$.

Demostración:Para cada $Z_0 \in D$, en cada entorno $D_{(Z_0,r)} \in D \Rightarrow$
$f(Z)$ tiene primitiva $\Rightarrow \exists F(Z)/F'(Z) = f(Z) \forall Z \in D_{(Z_0,r)}$ y como $F \in H(D_{(Z_0,r)}) \Rightarrow f(Z) = F'(Z) \in H(D_{(Z_0,r)}) \forall Z_0 \in D \therefore f(Z) \in H(D)$.

6.4. Teorema del módulo máximo

Sea c contorno cerrado, $\gamma = c \cup Int(c), f(Z)$ holomorfa en un abierto que contiene a γ.Sea $M = Max\{|f(Z)| : Z \in \gamma\} \exists$ por ser γ cerrado y acotado en $\mathbb{C}$ y $|f(Z)|$ continua en γ.
Sea $a \in D = int(c)$ si $|f(a)| = M \Rightarrow f(Z) = cte$ en D.

7. Series

Una serie es una sucesión de sumas, que presenta un término general, acotada o no por los coeficientes iniciales y finales de la misma.

$$\sum_{i=inicial}^{f=final} Z_n$$

Se dice que la serie es **Convergente (C)** si:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Z_n = \sum_{i=1}^{\infty} Z_n = S}$$

Donde S es la suma de toda la serie.

Como condición <u>necesaria</u> de convergencia, el limite del término general Z_n cuando $n \to \infty$ debe ser 0.

7.1. Convergencia Absoluta (CA)

$\sum_n Z_n$ Converge Absolutamente si $\sum_n |Z_n|$ converge.

7.1.1. Criterio de Abel

Si $\{r_n\} \subset \mathbb{R}/r_n > 0; \underbrace{r_n > r_{n+1}}_{decrece}; \lim_{n\to\infty} r_n = 0$ y

$\{Z_n\} \subseteq \mathbb{C}/\exists M > 0/|\sum_{n=1}^{n} Z_n| \leq M\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{n} r_n Z_n(C)$

7.1.2. Serie Geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1 + W + W^2 + W^3 + ... + W^n = S_n \Rightarrow S_n = \frac{W^{n+1}-1}{W-1} \text{ o } n+1 \text{ si } W = 1.$$

Si $\boxed{|W| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{n} W_n = \frac{1}{1-W}}$

7.2. Convergencia puntual de una suceción de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en un conjunto $D \in \mathbb{C}$, se dice que la sucesión $\{f_n\}$ **Converge Puntualmente** en D si $\forall Z \in D\exists \lim_{n\to\infty} f_n(Z)$.
Así si la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en D, queda definida una función
$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$

7.3. Convergencia Uniforme de una sucesión de funciones

Sea $\{f_n(Z)\}$ una sucesión de funciones, $Z \in D \subseteq \mathbb{C}$, se dice que $f_n(Z)$ **Converge Uniformemente** a la función $f(Z)$ en D y escribimos $f_n\overrightarrow{unif}f$ en D, si
$\forall\epsilon > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0|f_n(Z) - f(Z)| < \epsilon\forall Z \in D$.

Notar la diferencia con la definición de convergencia puntual, que presenta el $\forall Z \in D$ antes, lo que significaria un "Para alguno pasará en algun momento", mientras que para la convergencia uniforme lo presenta al final, a modo de

"Prometiendo que despues todos cumplen".

Como criterio de convergencia uniforme podemos emplear lo siguiente:

Sea $\{f_n(Z)\}, Z \in D / \forall n \in \mathbb{N} \exists r_n > 0 / |f_n(Z)| \leq r_n \forall Z \in D$ y supongamos $\sum r_n(C) \Rightarrow \sum f_n(Z)$ Converge uniformemente en D.

7.4. Series de potencias complejas

Son de la forma $a_0 + a_1(Z - Z_0) + ... + a_n(Z - Z_0)^n$ que podemos simbolizar $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_0)^n}$ con $a_n, Z, Z_0 \in \mathbb{C}$

$\sum a_n(Z - Z_0)^n(C)$ en $Z = Z_1 \longleftrightarrow \sum a_n W^n(C)$ en $W = Z_1 - Z_0$

Si la serie converge para $Z = Z_1 / Z_1 \neq Z_0 \Rightarrow$ la serie converge absolutamente
$\forall Z / |Z - Z_0| < |Z_1 - Z_0|$ y si $0 < r < |Z_1 - Z_0| \Rightarrow \sum a_n(Z - Z_0)^n(CU)$
si $|Z - Z_0| \leq n$

Demostración: Supongo $|Z - Z_0| < |Z_1 - Z_0|$.Sabiendo que converge para $Z = Z_1 / Z_1 \neq Z_0$

$$\sum a_n(Z - Z_0)^n = \underbrace{\sum a_n(Z_1 - Z_0)^n}_{Acotado} \underbrace{\frac{(Z - Z_0)^n}{(Z_1 - Z_0)^n}}_{<1} \Longrightarrow (CU)$$

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_0)^n$, una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera :
1)$\sum a_n(Z - Z_0)^n(C)$ solo en $Z = Z_0 \Rightarrow \rho = 0$
2)$\sum a_n(Z - Z_0)^n(C) \forall Z \in \mathbb{C} \Rightarrow \rho = \infty$
3)$\exists Z_1 \neq Z_0 / \sum a_n(Z_1 - Z_0)^n(C)$ y $\exists Z_2 \in \mathbb{C} / \sum a_n(Z_2 - Z_0)^n(D) \Rightarrow$
$\exists \rho > 0 / \sum a_n(Z - Z_0)^n /$

$$(CA) \text{ si } |Z - Z_0| < \rho$$
$$(CU) \text{ si } |Z - Z_0| \leq r, r < \rho$$
$$(D) \text{ si } |Z - Z_0| > \rho$$

Donde ρ es el **Radio de Convergencia** de la serie.
$\rho = \sup\{r / \sum a_n(Z - Z_0)^n (CA) si |Z - Z_0| < r\}$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} si \exists$$

7.4.1. Teorema de Taylor

Dada $f(Z) \in H(\{Z / |Z - Z_0| < \rho\}) \Rightarrow \exists! \{a_n\} \subset \mathbb{C} / si |Z - Z_0| < \rho \Rightarrow$
$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z - Z_0)^n$, con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+} \frac{f(W)}{(W - Z_0)^{n+1}} dW$

Ejemplos:

$$f(Z) = \frac{1}{1 - Z} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n \forall Z \in \mathbb{C}$$

$$f(Z) = e^Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!} \forall Z \in \mathbb{C}$$

$$f(Z) = Sen(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} Z^{2n+1} \forall Z \in \mathbb{C}$$
$$f(Z) = Cos(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} Z^{2n} \forall Z \in \mathbb{C}$$

7.4.2. Serie de Laurent

Son de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n$ Si desarrollamos la serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(Z-Z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_{-n}}_{b_n}(Z-Z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n$$

$\exists \rho_1 \geq 0 / \sum_{n=1}^{\infty} b_n(Z-Z_0)^{-n}$:

$$\begin{gathered} (CA) \text{ si } |Z-Z_0| > \rho_1 \\ (CU) \text{ si } |Z-Z_0| > r, r > \rho_1 > 0 \\ (D) \text{ si } |Z-Z_0| < \rho_1 \end{gathered}$$

$\exists \rho_2 \geq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n$:

$$\begin{gathered} (CA) \text{ si } |Z-Z_0| < \rho_2 \\ (CU) \text{ si } |Z-Z_0| < r, 0 < r < \rho_2 \\ (D) \text{ si } |Z-Z_0| > \rho_2 \end{gathered}$$

Toda serie de Laurent con región de convergencia $RC : \{Z/\rho_1 < |Z-Z_0| < \rho_2\}$ *define una función holomorfa en* Ω.
Reciprocamente: Si $f(Z) \in H(\{Z/\rho_1 < |Z-Z_0| < \rho_2\}) \Rightarrow \exists! \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} /$
$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n$ *si* $\rho_1 < |Z-Z_0| < \rho_2$, *Con* $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c+} \frac{f(W)}{(W-Z_0)^{n+1}} dW$

7.5. Singularidades

7.5.1. Singularidad Evitable

Z_0 es una singularidad evitable de $f(Z)$ si $f(z)$ no es holomorfa es Z_0 y $\exists \lim_{Z\to Z_0} f(Z) = a_0$

Ejemplo: $\frac{Sen(Z)}{Z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n}}{(2n+1)!}, |Z| > 0$
$Z_0 = 0$ es una singularidad evitable, y $\lim_{Z\to 0} \frac{Sen(Z)}{Z} = a_0 = 1$

7.5.2. Polo de Orden K

Z_0 es un polo de orden K si $f(Z) \in H(0 < |Z-Z_0| < \rho)$
$f(Z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(Z-Z_0)^n, 0 < |Z-Z_0| < \rho, a_{-k} \neq 0$
$f(Z) = \frac{h(Z)}{(Z-Z_0)^k}$ con $h(Z)$ Holomorfa en la región de convergencia.

$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = \infty$

Ejemplo: $\dfrac{e^Z}{(Z-1)^2}$ tiene un polo de orden 2 en $Z = 1$.

7.5.3. Singularidad Esencial Aislada

Si $f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(Z - Z_0)^n, 0 < |Z - Z_0| < \rho y \exists \infty a_n \neq 0/n < 0$, entonces Z_0 se llama Singularidad Esencial y NO $\exists \lim_{Z \to Z_0} f(Z)$.
Es válido decir que si la singularidad es aislada, y no existe el límite en el plano complejo ampliado, entonces es una singularidad esencial.

7.5.4. Singularidad no aislada

Puntos de acumulación de singularidades aisladas.

Ejemplo:$f(Z) = \dfrac{1}{Sen(\frac{1}{Z})}, |Z| > 0$ donde $Z = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son polos simples, y $Z = 0$ es una singularidad aislada.

7.5.5. Residuos de una función

Definimos $Res(f(Z), Z_0) = a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c+} f(Z)dZ$

Teorema de los Residuos Sea $f(Z)$ holomorfa en un abierto que contiene a un contorno cerrado c^+ y a su región interior, salvo en un conjunto finito de puntos $Z_1, ..., Z_n / Z_k \in int(c) \Rightarrow$

$$\boxed{\int_{c+} f(Z)dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(Z), Z_k)}$$

$$\boxed{Res(f(Z), Z_0) = \lim_{Z \to Z_0} \frac{\frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}}[(Z - Z_0)^n f(Z)]}{(n-1)!}}$$

Como caso particular, si $f(Z) = \frac{h(Z)}{g(Z)} \Rightarrow Res(f(Z), Z_0) = \frac{h(Z_0)}{g'(Z_0)}$

Si la función tiene un número *finito* de singularidades en $\mathbb{C} \Rightarrow$
$\sum_{k=1}^{n} Res(f(Z), Z_k) + Res(f(Z), \infty) = 0$, con $Res(f(Z), \infty) = -a_{-1}$

Si $f(Z) \in H(\{Z/|Z| > \rho\}), f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n = a_{-n}Z^{-n} + ... + a_{-1}Z_{-1} + a_0 + ... + a_n Z^n$
Llamamos $Z = \frac{1}{W}$ entonces $Z \to \infty \longleftrightarrow W \to 0$

$f(\frac{1}{W}) = a_{-n}W^n + ... + a_{-1}W + a_0 + ... + a_n(\frac{1}{W})^n \Rightarrow$

$\frac{1}{W^2} f(\frac{1}{W}) = a_{-n}W^{n-2} + ... + a_{-1}\frac{1}{W} + a_0\frac{1}{W^2} + ... + a_n(\frac{1}{W})^{n-2} \Rightarrow$

$Res(f(Z), \infty) = Res(\frac{-1}{W^2} f(\frac{1}{W}), 0)$

8. Integrales Impropias

La integral de Riemman requiere $f(X)$ definida en $[a,b]$ y acotada. Recordar que si $f(X)$ es acotada e integrable en $[a,b]$ y X_0 es un punto del intervalo $[a,b] \Rightarrow$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \hat{f}(X) = \begin{matrix} f(X) & \text{si} & X \neq X_0 \\ \alpha & \text{si} & X = X_0 \end{matrix}$ es integrable en $[a,b]$,aún cuando tenga finitas discontinuidades evitables.

8.1. Integrales impropias de primera especie

1. Si $f(X)$ es acotada en integrable en $[a,b] \forall b > a \Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(X)dX = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(X)dX si \exists$
2. Si $f(X)$ es acotada en integrable en $[a,b] \forall a < b \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(X)dX = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(X)dX si \exists$
3. Si $f(X)$ es acotada en integrable en $[a,b] \forall [a,b] \subset \mathbb{R}$.Sea $c \in \mathbb{R}$, si $\exists \displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(X)dXy \int_c^{+\infty} f(X)dX \Rightarrow$

   Diremos que $\exists \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX = \int_{-\infty}^{c} f(X)dX + \int_c^{+\infty} f(X)dX \Rightarrow$Si cada integra convergia, la suma tambien converge.

8.2. Criterios de comparación:

Si $f(X) \leq g(X) \forall X \in [a,+\infty)$ y $f(X) \geq 0, g(X) \geq 0 \forall X \in [a,+\infty) \Rightarrow$

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(X)dX(C) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(X)dX(C)$

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(X)dX(D) \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(X)dX(D)$

8.3. Criterio de Convergencia Simple (Abel)

Sea $f(X) \in c'([a,+\infty))/f'(X) \leq 0$ en $[a,+\infty)$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(X) = 0, f(X) > 0$ a partir de un cierto $k \in [a,+\infty)$.$g(X)$ continua en $[a,+\infty)/\exists M > 0, |\int_a^b f(X)dX| \leq M, \forall b > a \Rightarrow$

$$\int_a^{+\infty} f(X)g(X)dX(C)$$

8.4. Valor principal

$$\boxed{\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(X)dX}$$

Si existe la integral impropia entonces existe el valor principal, pero el recíproco no es cierto.

8.5. Integrales impropias de segunda especie

Considero $[a,b], X_0 \in [a,b], f(X)$ definida en $[a,b]$,no acotada en un entorno del X_0 y acotada e integrable en $[a,b] - E(X_0)$.

8.6. Lemas para la aplicación de variable compleja a la resolución de integrales reales

1. Sean $\alpha_1, \alpha_2 / -\pi < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi, r_0 > 0$
   $D = \{Z / |Z - Z_0| \leq r_0, -\pi \leq arg(Z - Z_0) \leq \alpha_2 \leq \pi\}, f(Z)$ continua en D,
   si $0 < r < r_0, c_r = \{Z / |Z - Z_0| = r\} \cap D \Rightarrow \lim\limits_{r \to 0} \int_{c+} f(Z)dZ = 0$

2. Sea $f(Z)$ holomorfa en $\{Z / 0 < |Z - Z_0| < r_0\}, Z_0$ polo simple,
   $D = \{Z \in \mathbb{C} / 0 < |Z - Z_0| < r_0, -\pi < \alpha_1 \leq arg(Z - Z_0) \leq \alpha_2 \leq \pi\}$
   si $r < r_0, c_r = c_{(Z_0, r)} \cap D \Rightarrow \lim\limits_{r \to 0} \int_{c+} f(Z)dZ = i(\alpha_2 - \alpha_1)a_{-1}$

3. (*Jordan*) Sea $\alpha_1, \alpha_2 / -\pi < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi, r_0 > 0$
   $f(Z)$ continua en $\Omega : \{Z / |Z| \geq r_0, \alpha_1 \leq arg(Z) \leq \alpha_2\}$.Sea $R > r_0$
   $c_R = \{Z / |Z| = R\} \cap \Omega$ (orienada positiva).$M(R) = \underbrace{Max}_{Z \in c_R} |f(Z)|$,
   supongo $\lim\limits_{R \to +\infty} M(R) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{R \to +\infty} \int_{c_R^+} f(Z)dZ = 0.$
   Es equivalente a esto último decir : Si $Z \in \Omega$, $\lim\limits_{z \to +\infty} Zf(Z) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{R \to +\infty} \int_{c_R^+} f(Z)dZ = 0$

Parte II
Aplicaciones en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

9. Ecuaciones en Derivadas Parciales

$F(X, ..., X_n, U(X, ..., X_n), \frac{\partial U}{\partial X}, ..., \frac{\partial^k U}{\partial X^k}) = 0$
El mayor orden de derivación es el orden de la ecuación. Estando igualada a 0 es una ecuación *Homogenea*.

Por ejemplo algunas EDP con aplicaciones físicas:

$$\boxed{\textit{Ecuación de Laplace :} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0}$$

$$\boxed{\textit{Ecuación de Ondas unidimensional :} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\textit{Ecuación del calor :} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0}$$

Para describir un fenómeno, además de la EDP, se precisan condiciones iniciales del proceso.En el caso de la ecuación del calor : la temperatura en los bordes de una barra a tiempo $t \geq 0$ y la función de distribución espacial del calor. Se aplica continuamente el *Principio de Superposición* de soluciones para resolver los problemas.

9.1. Resolución de la ecuación del calor unidimensional

Teniendo las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$
$$U(0,t) = 0$$
$$U(l,t) = 0$$
$$U(X,0) = f(X)$$

Aplico e método de separación de variables : $U(X,t) = \chi(X).\tau(t) \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,t) = \chi''(X).\tau(t)$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}(X,t) = \chi(X).\tau'(t)$$

Y reemplazando en la EDP: $\chi''(X).\tau(t) - \frac{1}{c^2}\chi(X).\tau'(t) = 0$

$$\frac{\chi''(X).\tau(t)}{\chi(X).\tau(t)} - \frac{1}{c^2}\frac{\chi(X).\tau'(t)}{\chi(X).\tau(t)} = 0 \Rightarrow \frac{\chi''(X)}{\chi(X)} - \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = 0 \Rightarrow$$
$$\exists\lambda / \frac{\chi''(X)}{\chi(X)} = \lambda = \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \chi''(X) - \lambda\chi(X) = 0 \\ \tau'(t) - \frac{1}{c^2}\lambda\tau(t) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{Bmatrix} \chi''(X) = \lambda\chi(X) \\ \tau'(t) = \frac{1}{c^2}\lambda\tau(t) \end{Bmatrix}$$

Considerando las condiciones iniciales : $U(0,t) = 0, U(l,t) = 0$

$\chi(0).\tau(t) = 0 \Rightarrow \chi(0) = 0$ Ya que $\tau(t)$ no puede ser 0 $\forall t$.

$\chi(l).\tau(t) = 0 \Rightarrow \chi(l) = 0$ Ya que $\tau(t)$ no puede ser 0 $\forall t$.

Con el polinomio característico de la primera ecuación
$r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda} \Rightarrow \chi(X) = Ae^{-\sqrt{\lambda}X} + Be^{\sqrt{\lambda}X} \Rightarrow$

$\chi(0) = \chi(X) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow \chi(X) = B(e^{\sqrt{\lambda}X} - e^{-\sqrt{\lambda}X})$
$\chi(l) = B(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0 \Rightarrow (B \neq 0) \Rightarrow e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l} \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}l} = 1 \Rightarrow$
$2\sqrt{\lambda}l = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi i}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{-n^2\pi^2}{l^2}$

$\therefore \chi_n(X) = B_n(e^{\frac{in\pi}{l}X} - e^{\frac{-in\pi}{l}X})$

Si tomo $B = \frac{1}{2i} \Rightarrow \chi_n(X) = Sen(\frac{n\pi}{l}X)$

Ahora volviendo a la otra ecuación del sistema : $\tau'(t) - c^2\lambda\tau(t) = 0 \Rightarrow$
$\tau'(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}\tau(t) = 0 \Rightarrow \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} \Rightarrow \tau(t) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}t}$

Finalmente : $\boxed{\therefore U_N(X,t) = \sum_{n=1}^{N}\chi(X).\tau(t) = b_n Sen(\frac{n\pi}{l}X)e^{-(\frac{n\pi}{l})^2c^2t}}$

es solución del problema planteado en el que $\boxed{f(X) = \sum_{n=1}^{N} B_n Sen(\frac{n\pi}{l}X)}$

10. Series de Fourier

10.1. Desigualdad de Bessel e Identidad de Parseval

Consideramos un espacio vectorial $\mathbb{V}$ con producto interno tal que $\exists\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{V}/(\Phi_n, \Phi_k) = 0$ si $n \neq k$ y $(\Phi_n, \Phi_n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{S_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(X, \Phi_n)}{||\Phi_n||} \frac{\Phi_n}{||\Phi_n||}}$ es la proyección de X sobre N

Se cumple que $||X||^2 = ||S_N - X||^2 + ||S_N||^2 \Rightarrow ||X - S_N||^2 = ||X||^2 - ||S_N||^2 \Rightarrow$
$0 \leq ||X - S_N||^2 = ||X||^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(X, \Phi_n)|^2}{||\Phi_n||^2} \Rightarrow ||X||^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{|(X, \Phi_n)|^2}{||\Phi_n||^2} \geq 0 \Rightarrow$
$\forall X \in \mathbb{V}, \forall n \in \mathbb{N}$, ya que esta acotada, hacemos tender $N \to \infty$ y se obtiene :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(X, \Phi_n)|^2}{||\Phi_n||^2} \leq ||X||^2} \textbf{ Desigualdad de Bessel}$$

Si $\lim_{N\to+\infty} S_N(X) = X$,$\{S_N\}$ converge a X entonces se dice que $\{\Phi_n\}$: *Sistema Ortogonal Completo* y vale la igualdad :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(X, \Phi_n)|^2}{||\Phi_n||^2} = ||X||^2} \textbf{ Identidad de Parseval}$$

- $C_n = \frac{(X,\Phi_n)}{||\Phi_n||^2}$ n-ésimo coeficiente de Fourier de X respecto de $\{\Phi_n\}$
- S_N N-ésima suma parcial de Fourier de X respecto de $\{\Phi_n\}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(X, \Phi_n)}{||\Phi_n||^2}\Phi_n$ **Serie de Fourier** de X respecto de $\{\Phi_n\}$

10.2. Serie exponencial de Fourier

Sistema Ortogonal Exponencial : $\{\Phi_n\} = \{e^{inX}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con $C[-\pi, \pi] : \{f(X) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, Continuas\}$

Definimos el producto interno : $(f(X), g(X)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(X)\bar{g}(X)dX$

Sobre el cuál la norma sería : $||f(X)|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(X)|^2 dX}$

$(e^{inX}, e^{-ikX}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inX}.e^{-ikX}dX = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)X}dX = 0$ Verificamos la ortogonalidad.

$(e^{inX}, e^{inX}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inX}.e^{-inX}dX = \int_{-\pi}^{\pi} dX = 2\pi$ La norma del sistema exponencial.

Calculámos los coeficientes de la Serie de Fourier : $\boxed{C_n = \frac{(f(X), e^{inX})}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X)e^{-inx}dX}$

- N-ésima suma parcial exponencial de Fourier : $\boxed{S_N(X) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}}$

- La *Serie Exponencial de Fourier* de $\boxed{f(X) \in [-\pi, \pi] : \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}}$

- Identidad de Parseval : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 ||\Phi_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi)^2 |C_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(X)|^2 dX}$

10.3. Serie trigonométrica de Fourier

Sistema Ortogonal Trigonométrico : $\{\Phi_n\} = \{1, Cos(nX), Sen(nX)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$C[-\pi, \pi] : \{f(X) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, Continuas\}$

Definimos el producto interno : $(f(X), g(X)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(X)\bar{g}(X)dX$

Sobre el cuál la norma sería : $||f(X)|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(X)|^2 dX}$

$(e^{inX}, e^{inX}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inX}.e^{-inX} dX = \int_{-\pi}^{\pi} dX = 2\pi$ La norma del sistema trigonométrico (*La misma que el del exponencial*).

Calculámos los coeficientes de la Serie de Fourier :

$$\boxed{a_n = \frac{(f(X), Cos(nX))}{||Cos(nX)||^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X)Cos(nX)dX}$$

$$\boxed{b_n = \frac{(f(X), Sen(nX))}{||Sen(nX)||^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X)Sen(nX)dX}$$

$$\boxed{c_n = \frac{(f(X), 1)}{||1||^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(X)dX = \frac{a_0}{2}}$$

- N-ésima suma parcial exponencial de Fourier : $\boxed{S_N(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n Cos(nX) + b_n Sen(nX)}$

- La *Serie Trigonométrica de Fourier* de $\boxed{f(X) \in [-\pi, \pi] : S_N(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n Cos(nX) + b_n Sen(nX))}$

- Identidad de Parseval : $\boxed{\frac{a_0^2}{4} 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)\pi = ||f(X)||^2}$

Los coeficientes de Fourier Existen $\longleftrightarrow \exists \int_{-\pi} \pi |f(t)| dt$ *(vale para integrales impropias).*

10.4. Periodicidad de la función

Considerar $f(t)$ definida en $(\pi, \pi]$, puede interpretarse como que $f(t)$ se puede extender a una $f(t)$ $2\pi-$periódica, y reciprocamente si $f(t)$ es T-periódica.

Redefinimos entonces :

Sistema Exponencial en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] : \{e^{in\frac{2\pi}{T}t}\}$

Sistema Trigonométrico en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] : \{1, Cos(n\frac{2\pi}{T}t), Sen(n\frac{2\pi}{T}t)\}$

Con $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2} \Rightarrow -1 < \frac{t}{(\frac{T}{2})} \leq 1 \Rightarrow -1 < \frac{2t}{T} \leq 1 \Rightarrow -\pi < \frac{2\pi t}{T} \leq \pi$

$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}dt$

Si $|f(t)|^2$ es integrable en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$

Si por ejemplo se definiera $f(t)$ en $[a, b]$,el sistema exponencial quedaría :$\{e^{in\frac{2\pi}{(\frac{b-a}{2})}(t-\frac{a+b}{2})}\}$,
$t \in [a, b]$

En lo que sigue se consideraran funciones $f(t)$ absolutamente integrables $(\exists \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt)$ en $(-\pi, \pi]$,extendidas $2\pi-$periódicas.

10.5. Convergencia de una función

Para una función definida en $(-\pi, \pi]$ podemos considerar:

1. Dada $\{f_n(t)\}$, $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ converge puntualmente en $(-\pi, \pi]$ si :
   $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \forall t \in (-\pi, \pi]$

2. Dada $\{f_n(t)\}$, $f_n(t)\overrightarrow{unif} f(t)$ converge uniformemente en $(-\pi, \pi]$ si :
   $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0 |f_n(t) - f(t)| < \epsilon \forall t \in (-\pi, \pi]$

3. Dada $\{f_n(t)\}$, $f_n(t)\overrightarrow{unif} f(t)$ converge en media cuadrática en $(-\pi, \pi]$ si :
   $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$, ambas integrables.

10.5.1. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Sea $f(t)$ integrable en $[-\pi, \pi]$, definida en $(-\pi, \pi]$,extendida $2\pi-$periódica en $\mathbb{R}$.

$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$,sea $t_0 \in [-\pi, \pi]$,
¿Cuándo existe $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)(t_0)$?¿Cuál es su valor?

Utilizaremos el *Lema de Riemman-Lebesgue* : *Si* $f(t)$ *integrale en* $[a, b]$ *(y* $\exists \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$*)*$\Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)e^{\pm i\lambda t}dt =$ 0.. El signo será tal que la exponencial sea decreciente.

<u>Integral de Dirichlet:</u>

Sea $t_0 \in [-\pi, \pi], f(t)/$ es integrable y $\exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$

$$S_N(f)(t_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int_0} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{n=-N}^{N} e^{in(\overbrace{t_0 - t}^{u})}) f(t)dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)[e^{-iNu} + e^{-i(N-1)u} ... + e^{-iu} + 1 + e^{iu} ... + e^{iuN}]du \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-iNu}[1 + e^{iu} + ... + e^{iNu} + ... + e^{i \overbrace{2N}^{M} u}]du \Rightarrow$$

Recordando $1 + q + ... + q^M = \frac{q^{M+1}-1}{q-1} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-iNu}[\frac{e^{i(2N+1)u} - 1}{e^{iu} - 1}]du$

Aplicando $e^{ia} - 1 = e^{i\frac{a}{2}}[e^{i\frac{a}{2}} - e^{-i\frac{a}{2}}] = e^{i\frac{a}{2}} 2iSen(\frac{a}{2})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-iNu}[\frac{e^{i(\frac{2N+1}{2})u} 2iSen((\frac{2N+1}{2})u)}{e^{\frac{iu}{2}} 2iSen(\frac{u}{2})}]du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + t_0)[\frac{Sen((\frac{2N+1}{2})u)}{Sen(\frac{u}{2})}]du \Rightarrow$$

Integral de Dirichlet : $S_N(f)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + t_0)[\frac{Sen((\frac{2N+1}{2})u)}{Sen(\frac{u}{2})}]du$

11. Transformada de Fourier

12. Transformada de Laplace