Parcial - Análisis III - 10/05/12

1. Calcular la integral utilizando el teorema de los Residuos: $\int_0^\infty \frac{\cos t}{(1+t^2)^2}dt$. Estudie la convergencia y justifique la elección de la curva utilizada en el plano complejo.

2. a) Sea $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Analizar en qué transforma ésta al dominio $D = \{z = x+yi \in \mathbb{C}/y \geq 0\}$.
   b) Resolver la ecuación de Laplace en el interior de la circunferencia unitaria centrada en $z = 0$. La condición de contorno es que: $u = 1$ en la semicircunferencia superior y $u = -1$ en la inferior.

3. Sea $f(z)$ una función holomorfa en todo el plano complejo y tal que $f(z) = u(x,y) + iu^3(x,y)$. Si se sabe que ~~$f(3+2i) = 4-2i$~~, calcular $f(1+6i)$. (no dan los valores $f(3+2i) = 4+64i$

4. Sea $u = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2+4x^2y^2}$. Determine, justificando adecuadamente si $u = constante$ puede ser una línea equipotencial. De ser posible, encuentre el potencial complejo correspondiente.

5. a) Analizar las singularidades en $\mathbb{C}$ de la función $f(z) = \frac{e^{1/z}}{cos(z)}$. Calcule el residuo en $z = \pi/2$.
   b) Hallar c_n, $\forall n \leq 0$ del DSL de la función $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ de la forma $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Parcial Análisis IIIA - 11 de octubre de 2012

1. Analizar convergencia y calcular, fundamentando adecuadamente el procedimiento utilizado, la integral: $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

2. Analizar todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$ y calcular la integral: $\oint_{|z|=\pi} f(z)dz$.

   Recordar que: $1+$ $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e$

3. Hallar **todas** las funciones $f(z)$ enteras que cumplen con las siguientes condiciones: **1):** $f(z) = f(z+1)$, **2):**$f(z) = f(z+2i)$, ambas $\forall z$ y **3):** $f(1+i) = 3-2i$. Justificar adecuadamente su respuesta.

4. Dada $u(x,y)$ armónica, hallar, justificando adecuadamente, **todas** las funciones holomorfas $f(z)$ tales que $f(z) = u(x,y) + ie^{u(x,y)}$ y que cumplan con $f(0) = i$.

5. Qué región del plano complejo, a través de la función $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, se transforma en el interior de la circunferencia unitaria, y por qué?

Primer Recuperatorio Análisis III A - 8 de noviembre de 2012

1. Analizar convergencia y calcular, fundamentando adecuadamente el procedimiento utilizado, la integral: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{senx}{x(x^2+4)}dx$

2. Sea la transformación $H(z) = sen\ z$. **3.1)** Para qué valores de z es conforme $H(z)$? **3.2)** En qué se transforma la región $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \ / \ x \in [-\pi, \pi];\ y \in [1,2]\}$ a través de $H(z)$? **3.3)** Idem con la región $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \ / \ x \in [-\pi, \pi];\ y \geq 0\}$.

3. a) Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \frac{1}{\cosh(z) - 1}$. b) Escribir la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ indicando la región de convergencia y su radio R.
   c)Calcular $\oint_{|z|=R/2} \frac{z^3 + 2iz}{\cosh(z)-1}\, dz$.

4. a) Hallar la distribución estacionaria de temperatura de la región comprendida entre las circunferencias $C_1 : |z-1| = 1$ y $C_2 : |z-\pi| = \pi$ sabiendo que C_1 se mantiene a $0°C$ y C_2 a $100°C$. Expresar el resultado en función de $z = x+iy$.
   b) Expresar la temperatura del segmento $\{z = x+iy \in \mathbb{C}/y = 0; x \in [2, 2\pi]\}$. Graficar aproximadamente y verificar que cumple con las condiciones del problema. c) Expresar cuánto vale la temperatura sobre la circunferencia $|z-2| = 2$ y comparar, donde sea posible, con el resultado de b).

5. Desarrollar $f(z) = \frac{1}{(2z-1)(4z+1)}$ en serie de potencias de z, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, de forma tal que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n = \xi$, sea absolutamente convergente. Indicar claramente el dominio de convergencia D y calcular ξ.

Segundo Recuperatorio Análisis III A - 11 de diciembre de 2012

Se aprueba, como siempre, con 3 ejercicios **BIEN**, *dos de los cuales deben ser el 1, 2 o 5*

1. Calcule, justificando adecuadamente y haciendo uso del teorema de los residuos, la integral: $\int_0^\infty \frac{dx}{8+x^3}$

2. Sea la función $H(z) = sen\ z$. **a)**. En qué se transforma la región $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \ / \ x \in [-\pi/2, \pi/2];\ y \in [1,2]\}$ a través de $H(z)$? **b)** Idem con la región $\{z = (x,y) \in \mathbb{C} \ / \ x \in [-\pi/2, \pi/2];\ y \geq 0\}$. **c)** Halle el potencial complejo correspondiente a problema dibujado en el pizarrón.

3 a) Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{\cosh(z)-1}$. **b)** Escribir la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z=0$ indicando la región de convergencia y su radio R.
c)Calcular $\oint_{|z|=R/2} \dfrac{z^3+2iz}{\cosh(z)-1}\,dz$.

4 Sea C un contorno simple cerrado y D su interior, $f(z)$ holomorfa sobre $C \cup D$, salvo en $z_0 \in D$, donde tiene un polo doble. Si $f(z)$ no se anula sobre C y en su interior D tiene dos ceros de orden simples en z_1 y z_2, calcular $\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}\,dz$. Justifique adecuadamente.

5. Desarrollar $f(z) = \dfrac{1}{(8z-1)(2z+1)}$ en serie de potencias de z de la forma, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k$, tal que la serie $\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi^k}$, converja absolutamente. Indicar claramente el dominio de convergencia D y calcular el valor de σ.

Primer Recuperatorio Análisis III A - 6 de junio de 2013

Justifique adecuadamente todos los procedimientos

1. Dada la región del plano $\mathbb{O} = \{z \in \mathbb{C} : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];\ y \geq 0\}$ **a)** Determinar en qué región se transforma $\mathbb{O}$ a través de la función $f(z) = i\ sen(z)$. **b)** Resolver el problema de la distribución estacionaria de temperaturas en la región $\mathbb{O}$ tal como se presenta en el pizarrón.

2. Analizar convergencia y calcular: $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{sen(2x)}{x^3+4x}dx$

$\cosh(z) = \cos iz = 2k\pi$
$\Rightarrow z = -i2k\pi$

3. **a)** Determinar qué tipo de singularidad tiene la función $f(z) = \dfrac{1}{1-cosh(z)}$ en $z=0$ **b)** Hallar la parte principal del desarrollo de $f(z)$ en potencias de z en un entorno de $z=0$. Indicar el dominio de convergencia. Cuánto vale Res($f(z)$,z=0)? **c)** Calcular la integral $\oint_{|z|=\pi/2} f(z)dz$

4. **a)** Es posible que la función $h(z) = e^{x^2-y^2} sen(2xy) - \dfrac{y}{x^2+y^2} + x^2 - y^2$ sea la parte imaginaria de una función analítica $\psi(z) = g(z) + h(z)$? Justificar adecuadamente. **b)** Calcular

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\psi(z)}{(z^2+4)^2}dx$$

5. Calcular: $\oint_{|z|=\rho} z^k cos(\frac{1}{z})dz$, para $k = 1, 2, \ldots$ Qué valores debe tomar ρ?

Segundo Recuperatorio Análisis III A - 2 de julio de 2013

Justifique adecuadamente todos los procedimientos

1. Analizar la convergencia de la integral: $\int_0^\infty \dfrac{dx}{16+x^4}$. Proponer dos curvas distintas en el plano complejo para resolverla utilizando el teorema de los residuos. Elegir una de ellas y calcularla.

2. a) Determinar y clasificar todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de la función $g(z) = \dfrac{sen^2 z}{z^3(1-cos\ z)}$. Calcule la integral: $\oint_{|z|=2} z^k g(z)dz$, con $k=2$.

3. Desarrollar $f(z) = \dfrac{1}{(3z-1)(4z+1)}$ en serie de potencias de z, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, de forma tal que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n = \xi$, sea absolutamente convergente. Indicar claramente el dominio de convergencia D y calcular ξ.

4. a) Puede la función $\xi(x,y) = e^x sen(y) + \pi \dfrac{y}{x^2+y^2} + x^2 - y^2$ formar parte de $\phi(z)$, holomorfa, tal que $\phi(z) = \xi(x,y) + i\zeta(x,y)$, con $\zeta(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Determinar $\phi(z)$. b) Calcular $\oint_{|z-1-i|=\sqrt{3}} \dfrac{\phi(z)}{(z^2+1)}dx$

5. a) Hallar la distribución estacionaria de temperatura de la región comprendida entre las circunferencias $C_1 : |z-1| = 1$ y $C_2 : |z-\pi| = \pi$ sabiendo que C_1 se mantiene a $0°C$ y C_2 a $100°C$. Expresar el resultado en función de $z = x + iy$.
b) Graficar aproximadamente la temperatura del segmento $\{z = x+iy \in \mathbb{C}/y = 0; x \in [2, 2\pi]\}$.

Parcial Análisis III - 29 de mayo de 2014

Recuerde que la justificación es parte esencial de la resolución

1. Analizar convergencia y calcular la integral: $\int_0^\infty \frac{dx}{(16+x^2)^2}$ $= 2\pi i \, [\mathrm{Res}.$

2. Dadas las transformaciones: $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$ y $g(z) = \frac{z-1}{-z+2}$. **a)** Hallar $h(z) = (f^2 \circ g)(z) = (f \circ f \circ g)(z)$ **b)** Hallar la imagen por $h(z)$ del dominio: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$

3. **a)** Resolver la ecuación del calor en $x \in [0;\pi]$, $t \geq 0$, para $T(x,t)$: $T_{xx} = T_t$ con las condiciones de contorno: $T(0,t) = T(\pi,t) = 0$ y la condición inicial: $T(x,0) = 2\,sen(3x)$. **b)** Determinar la evolución de la temperatura en función del tiempo para el punto central del intervalo.

4. Sea $f(x) = x$, $x \in [0;\pi]$. **a)** Graficar las funciones periódicas resultantes de desarrollar **a.i)** $f(x)$ con período π, **a.ii)** Su extensión par y **a.iii)** Su extensión impar. **b)** Hallar la serie de Fourier de **a.ii.** **c)** A partir del desarrollo del punto anterior, calcular las sumas: $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ $S_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $S_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

5. Dada la función $m(z) = \frac{1}{cosh(z)}$, **a)** Hallar y clasificar todas sus singularidades en $\mathbb{C}$ **b)** Hallar los tres primeros términos del desarrollo en serie válido en un entorno de $z = 0$, explicitando claramente cuál es la región de convergencia.

$f(x) =$

Analisis III Primer recuperatorio - 17 de junio de 2014

1. Analizar convergencia y calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{(9x+x^3)}\,dx$$

2. Resolver la ecuación del calor en estado estacionario en el recinto $(x,t) \in \mathbb{R}^2 : [0,\pi] \times [0,1]$ con las condiciones de contorno del pizarrón.

$$\phi(0,t) = 0$$
$$\phi(\pi,t) = 0$$
$$\phi(x,1) = sin(2x)$$
$$\phi(x,0) = 0$$

3. (a) Hallar el desarrollo de Laurent en potencias de $(z+2)$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z+2)^n$$

de la función

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - sinh\frac{\pi}{z+2}$$

, de manera que la serie$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|$ converja y calcular su suma. Dar el dominio de convergencia de dicho desarrollo.

(b) ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $f(z)$ en $z = -2$ y cuánto vale su residuo?

4. Hallar el desarrollo de Fourier de

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Analizar la convergencia puntual $\forall t$ y calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

5. (a) Es posible que la función

$$h(x) = e^{x^2-y^2} sin(2xy) - \frac{y}{x^2-y^2}$$

sea la parte real de una función analítica $\psi(z) = \zeta(z) + \phi(z)$? Justificar adecuadamente.

(b) Calcular

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\psi(z)}{(z^2+4)} dz$$

Análisis III. Primer Parcial - 24 de octubre de 2014

La justificación es parte esencial de la resolución.
Para aprobar, es necesario tener tres ejercicios bien

1. Sea $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$. Hallando el desarrollo en Serie de Fourier de f calcular la suma de la serie $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Enunciar el Teorema de los Residuos y hallar el valor de la integral $\oint_C \frac{6z^2}{z^6+1} dz$ donde C es la curva positivamente orientada definida por el borde de la región D siguiente:
$$D = \{z \in C / |z| \leq 2 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

3. Sea $D = \{(x, y) \in R^2 / \quad x^2 + y^2 + 2x \leq 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + 2y \leq 0\}$.
a) Determinar la imagen de la región D a través de la función $f(z) = \frac{1}{z}$.
b) Hallar la función u armónica en D que satisface las siguientes condiciones:
$$u(x, y) = 0 \quad si \quad x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad ; \quad u(x, y) = \pi \quad si \quad x^2 + y^2 + 2y = 0 \quad ; \quad (x, y) \in D.$$

4. Sea $f : C \to C$ una función entera. Determinar si la función $\overline{f}(\overline{z})$ es entera y en caso afirmativo demostrarlo.

5. a) Resolver la ecuación del calor en $x \in [0; \pi]$, $t \geq 0$, para $\Theta(x, t)$: $\Theta_{xx} = \Theta_t$ con las condiciones de contorno: $\Theta(0, t) = \Theta(\pi, t) = 0$ y la condición inicial: $\Theta(x, 0) = 2sen(5x)$.
b) Si t está expresado en segundos y Θ en grados, en qué instante toma el punto medio del intervalo la temperatura de $2e^{-50}$ grados.

Análisis III. Parcial - 14 de mayo de 2015

La justificación es parte esencial de la resolución.
Para aprobar, es necesario tener tres ejercicios BIEN

1. Analizar la convergencia e integrar, usando métodos de variable compleja: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(\pi x)\, dx}{(x^3 + x)}$

2. La función: $H(x, y) = e^{3x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \cos(3y) + \frac{y}{x^2 + y^2} sen(3y) \right)$, ¿puede ser la parte real del potencial complejo de algún campo vectorial? Justificar adecuadamente y, en caso de ser posible, hallarlo.

3. Considere las funciones $p(z) = \frac{z+i}{z}$ y $q(z) = \frac{z+1}{-iz}$ **a)** Exprese la función $h(z) = (p \circ q)(z)$ **b)** Hallar la imagen por $h(z)$ del dominio $\{\mathbf{Re}(z) > -1\}$.

4. **a)** Hallar y clasificar todas las singularidades de $f(z) = \frac{1}{\cosh(z) - 1}$. **b)** Escribir la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ indicando la región de convergencia y su radio R.
c) Calcular $\oint_{|z|=R/2} \frac{z^3 + 2iz}{\cosh(z) - 1} dz$.

5. **a)** Demostrar que la función $M(x, y) = e^{2x} sen(y) \cos(y)$ es armónica, utilizando propiedades adecuadas. **b)** Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica y sea $S(z) = u(x, y) + iP(u(x, y))$, con $P(x)$ un polinomio de grado ≥ 1. Mostrar que si **b.1)** $S(2 + i) \neq S(2 - i)$, $S(z)$ no es analítica y si **b.2)** $S(z)$ es analítica, entonces $S(2 + i) = S(2 - i)$.

Análisis III. Primer recuperatorio - 11 de junio de 2015

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. **a.1)** Determinar y clasificar todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de la función $g(z) = \frac{sen(iz)}{z(e^z + 1)(2 - \cos z)}$. **a.2)** Calcule la integral: $\oint_{|z|=\pi/8} z^k g(z) dz$, con $k = 1, -1$. **b)** $f(z)$ es holomorfa, tiene un cero doble en z_1 y un cero simple en z_2 en el interior de cierta curva simple cerrada Γ. Hallar el valor de la integral: $\oint_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

2. **a.1)** Calcular, justificando adecuadamente, la integral: $\oint_{|z|=\rho} z^n sen\left(\frac{1}{z}\right) dz$, para $n = 2, 3, 4$. **a.2)** Qué tipo de singularidades tiene el integrando dentro de la curva de integración en cada caso ? Cómo depende el valor de la integral en función de ρ? **b)** Sea $f(z) = \frac{cosh(z)}{z^2}$, calcular $\oint_{|z|=\pi} \frac{f(z)}{z^{101}} dz$.

3. **a)** Hallar los tres primeros términos del desarrollo en serie de la función $f(z) = \frac{1}{e^{8iz} - 1}$, en la forma: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ y que converja un entorno de en $z = 0$ **b)** Determinar la región de convergencia si converge en $z = \frac{i}{2}$. **c)** Determinar la región de convergencia de la serie si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n < \infty$.

4. **a)** Hallar una función armónica $U(x, y)$ que toma el valor 1 sobre $\{C_1 : |z - 4| = 4\}$ el valor 2 sobre $\{C_2 : |z - 2| = 2\}$.
b) Cuánto vale $U(6, 0)$? **c)** Graficar aproximadamente $U(x, 0)$ para $x \in [4, 8]$.

5. Dadas estas integrales: $I_1 : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^3 + 8}$ y $I_2 : \int_0^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2 + 9}$, analice convergencia y calcule la que converge.

Análisis III. Parcial - 22 de octubre de 2015

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. **a)** Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de forma tal que la función $u(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = ax^3 + bxy^2$ sea armónica. **b)** Hallar su conjugada armónica, tal que $f(z) = A(x,y) + iu(x,y)$ sea holomorfa. **c)** Analizar los puntos para los cuales, la función $H(z) = \dfrac{sen(u - iA)}{A + iu}$ es analítica y clasificar sus singularidades.

2. Calcular, justificando adecuadamente, la integral: $\int_{|z|=2} z^n sen\left(\frac{1}{z^2}\right)$, para $n = 1, 2, 3$ y 4. Qué tipo de singularidades tiene el integrando dentro de la curva de integración en cada caso ?

3. **a)** Determinar el valor de k de forma tal que la función $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - cosh(z))^k}$ tenga un polo de orden 5 en $z_0 = 0$.
   b) Calcular $\oint_{|z|=\pi} z^4 f(z)dz$

4. Sean $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 2 \text{ y } |z - 5| \geq 1\}$ **a)** Determinar la imagen de D a través de $f(z) = \dfrac{1}{z-6}$. **b)** Hallar una función armónica $u(x,y)$ en la región $R \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-5)^2 + y^2 \geq 1$ y tal que $u(x,y) = 4$ si $(x-4)^2 + y^2 = 4 \wedge u(x,y) = 8$ si $(x-5)^2 + y^2 = 1$.

5. Dadas estas integrales: $I_1 : \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{cos(x)}{x^3 + 9}$ y $I_2 : \int_0^{\infty} \dfrac{cos(x)}{x^2 + 9}$, analice convergencia y calcule una de las integrales que converja.

Análisis III. Parcial - 12 de mayo de 2016

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. **a)** Analizar y clasificar **todas** las singularidades en $\mathbb{C}$ de $\Omega(z) = \dfrac{(z^2 - \pi^2)(e^z - 1)}{sen^2(z)}$ y de $\omega(z) = \dfrac{(z^2 - \pi^2)}{sen(z)}$. Calcular $\oint_{|z|=\sqrt{2}} w(z)dz$
   b) Demostrar: $\oint_{|z|=\alpha} \dfrac{2f(z)dz}{(z-z_0)^3} = \oint_{|z|=\beta} \dfrac{f''(z)dz}{z - z_0}$, y determinar las condiciones que deben cumplir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z)$ para que se cumpla la igualdad.

2. Analizar y justificar la convergencia de las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{sen(x)dx}{x(x^\gamma + 1)}$ para los valores $\gamma = 1, 2$ y 3. Elegir una de las que converja y calcularla con métodos de variable compleja.

3. Sea $u(x,y) = e^{xy}\cos(\frac{y^2 - x^2}{2})$ la parte real de una función $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$. **i)** Hallar todas las $f(z)$, que cumplen $f(0) = 1$. **ii)** Hallar el ángulo que forman las curvas de nivel $u(x,y) = e$ y $v(x,y) = 0$ en el punto $(1,1)$.
   iii) Si γ_1 y γ_2 son las imágenes a través de $f(z)$ de las rectas $x = 1$ e $y = 1$, determinar el ángulo que forman γ_1 y γ_2 en el punto $(e, 0)$.

4. Sea la función $M(z) = \dfrac{z+i}{(z-2i)(z-3i)}$. Escribir su serie de Laurent en la forma $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n (z-2i)^n$, de forma tal que $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \dfrac{|T_n|}{2^n}$ converja. Cuál es su región de convergencia? Cuánto vale $S = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \dfrac{T_n}{2^n}$?

Análisis III. Primer Recuperatorio - 2 de junio de 2016

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. **a)** Sea el recinto: $D = \{z / -\pi/2 \leq Re(z) \leq \pi/2, \quad Im(z) \geq 0\}$, determinar en qué se transforma a través de la función $w(z) = \sin z$.
   b) Hallar la función $A(x,y)$, armónica en el interior del recinto D, que vale cero sobre la semirrecta $x = -\pi/2$, 20 sobre el segmento del eje real $(-\pi/2, \pi/2)$ y 30 sobre la semirrecta $x = \pi/2$, todos con $y \geq 0$. Justificar adecuadamente.

2. **a)** Sea $u = \omega(x,y)$ un polinomio de dos variables reales y sea $v = e^{\omega(x,y)}$. Demostrar que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función holomorfa, entonces es constante.
   b) Hallar $h(z)$ analítica salvo en $z = i$ y $z = 2i$ donde tiene polos simples. Además tiene un cero simple en el ∞, $\text{Res}[h(z), z = i] = -1$ y $\int_{|z|=10} h(z)dz = 2\pi i$.

3. **a)** Analice la convergencia de las integrales **1)** $\int_0^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{8 + x^3}$ y **2)** $\int_0^{\infty} \dfrac{x^{-1/2}dx}{8 + x^3}$. **b)** Analice convergencia y calcule, justificando adecuadamente, la integral: $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{8 + x^3}$

4. **a)** Hallar el desarrollo de Laurent en potencias de $(z-1)$: $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-1)^n$ de la función $f(z) = \dfrac{1}{2-z} - sen\dfrac{\pi}{z-1}$, de manera que la serie $S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2^n$ sea absolutamente convergente. **b)** ¿Qué puede decir sobre la serie $S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_n 2^n$? ¿Cuánto valen S_1 y S_2? Dar el dominio de convergencia de dicho desarrollo. ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $f(z)$ en $z = 1$?

Turno CACHILE: Análisis III. Segundo Recuperatorio - 28 de junio de 2016

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. a) Analizar y clasificar todas las singularidades en $\mathbb{C}$ de $\omega(z) = \dfrac{(1-e^z)\left(z^2+(i\tfrac{1}{4}\pi)^2\right)}{sen^2(z)}$ y calcular $\oint_{|z|=\sqrt{\pi}} w(z)dz$

   b) Demostrar: $\oint_{|z|=\alpha} \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} = \oint_{|z|=\beta} \dfrac{f'(z)dz}{z-z_0}$, y determinar las condiciones que deben cumplir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z)$ para que se cumpla la igualdad.

2. Analizar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{sen(x)dx}{x\,(x^\gamma+1)}$ para los valores $\gamma = 1, 2$ y 3. Elegir uno de los que converja y calcule la integral con métodos de variable compleja.

3. Sea la función $M(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)(z+\pi)}$. Escribir su serie de Laurent en la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n\,(z-2)^n$, de forma tal que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |T_n|$ converja. Cuál es su región de convergencia? Cuánto valen $S_1 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n$ y $S_2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} nT_n$?

4. a) Hallar todas las funciones $f(z)$ enteras de la forma $f(z) = u(y) + iv(x)$. b) Es posible que la función $H(x,y) = e^{x/(x^2+y^2)} sen(y/(x^2+y^2)) - \dfrac{x}{x^2+y^2}$ sea la parte imaginaria de una función analítica $\psi(z) = G(x,y) + iH(x,y)$? Justificar adecuadamente. b) Calcular

$$\oint_{|z|=2} z^\alpha \psi(z)dz \qquad para\ n = 1\ y\ 2$$

Análisis III. Parcial- 20 de octubre de 2016

La justificación es parte esencial de la resolución.

1. a) Analice la convergencia de las integrales $\alpha)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{8+x^2}$ y $\beta)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}dx}{(8+x^2)}$. b) Calcule, justificando adecuadamente, la integral (α ó β) que converja.

2. Sea la función $M(z) = \dfrac{z+i}{(z-2i)(z-4i)}$. Escribir su serie de Laurent en la forma $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F_n\,(z-2i)^n$, de forma tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n|F_n|$ sea convergente. Cuál es su región de convergencia? Cuánto valen $S_1 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n$ y $S_2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} nT_n$? $\sum T_n (z-2i)^{n-1} = \sum n\, T_n \underbrace{(z-2i)}_{=1}^{n-1}$ $= F_n$

3. a) Sea $u = \omega(x,y)$ un polinomio de dos variables reales y sea $v = e^{\omega(x,y)}$. Demostrar que si $f(z_1) - f(z_2) \neq 0$ si $z_1 \neq z_2$ entonces, no puede ser analítica. b) Es posible que la función $\sigma(x,y) = e^{-x/(x^2+y^2)} sen(\dfrac{y}{x^2+y^2}) + \dfrac{3x}{x^2+y^2}$, sea la parte real de una función analítica $\Psi(z) = \sigma(x,y) + i\tau(x,y)$? Justificar adecuadamente. c) Hallar $f(z)$, homográfica, tal que: i) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{3}{5}$, ii) $\displaystyle\int_{|z-2i|=\epsilon} f(z) = 2\pi i$ y además tenga un polo en $z = 2i$.

4. a) Hallar la distribución estacionaria de temperatura de la región comprendida entre las circunferencias $\Gamma_1 : |z-i| = 1$ y $\Gamma_2 : |z-i\pi| = \pi$ sabiendo que Γ_1 se mantiene a $0°C$ mientras Γ_2 se mantiene a $100°C$. Expresar el resultado en función de $z = x+iy$.
   b) Expresar la temperatura del segmento $\{z = x+iy \in \mathbb{C}/x = 0; y \in [2, 2\pi]\}$. Graficar aproximadamente y verificar si cumple con las condiciones de contorno del problema. c) Expresar cuánto vale la temperatura sobre la circunferencia $|z-2i| = 2$ y comparar, donde sea posible, con el resultado hallado en b).

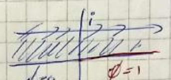
(P1) Demostrar que $e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ es Armónico $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y encontrar Conjugado Armónico.

(P2) Resolver

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad 0<y<1$$

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,1) = 0$$



(P3) Analizar convergencia y calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+4}\,dx$

(T1) Analizar cuántos resultados distintos tiene la siguiente integral y calcularlos

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2}$$

(T2) Demostrar el teorema de unicidad del desarrollo en serie de Laurent

(T3) Demostrar: $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ \displaystyle\int_{V(a)} g(x)\,dx \ \ CV \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int_{V(a)} f(x)\,dx \ \ CV$