Sobre la Práctica 1
Suponemos dim$(\mathbb{V}) = n$

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i. $\Leftrightarrow k \leq n.$

2. Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ genera $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n.$

3 Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base.

4 Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base de $\mathbb{V}$.

5 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V} \Rightarrow$ dim$(S) \leq n.$ (Tarea para el hogar)

6 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V}$ y dim$(S) =$ dim$(\mathbb{V}) \Rightarrow S = \mathbb{V}$.

7 Un conjunto de vectores son l.i $\Leftrightarrow$ sus coordenadas con respecto a cualquier base de $\mathbb{V}$ lo son.

Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se definen los subespacios:

Col$(A) =$ gen$\{$col$_1(A)$, col$_2(A), \ldots,$ col$_n(A)\} \subset \mathbb{K}^m$.

Fil$(A) =$ gen$\{$fil$_1(A)$, fil$_2(A), \ldots,$ fil$_m(A)\} \subset \mathbb{K}^n$.

nul$(A) = \{x \in \mathbb{K}^n / Ax = 0_{\mathbb{K}^m}\} \subset \mathbb{K}^n$.

nul$(A^T) = \{x \in \mathbb{K}^m / A^T x = 0_{\mathbb{K}^n}\} \subset \mathbb{K}^m$.

Se define **rango columna** de una matriz a la cantidad de columnas l.i. que tiene una matriz.

Se define **rango fila** de una matriz a la cantidad de filas l.i. que tiene una matriz.

Se prueba que $\forall\ A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ **rango columna**$(A) =$ **rango fila**(A), por lo tanto hablamos directamente de **rango**(A) =nº de filas l.i. de A =nº de columnas l.i. de $A =$ rg(A).

Con respecto a las soluciones del sistema lineal:

$\boxed{Ax = b \text{ con } A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ b \in \mathbb{K}^m.}$

$\boxed{\text{El sistema tendrá solución} \Leftrightarrow b \in \text{col}(A).}$

Y si $b \in$ col(A) ¿cuándo la solución será única y cuando tendrá infinitas soluciones?

$\boxed{\text{Solución única si las columnas de } A \text{ son li, dim(col}(A)) = n}$

$\boxed{\text{Infinitas soluciones si rg}(A) < n.}$

Si el sistema es compatible:

$\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} = \{x_p + x_h /\ x_p \text{ sol. particular },\ x_h \in \text{Nul}(A)\}$

El conjunto se puede describir con otra solución particular:

$\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} = \{x_1 + x_h /\ x_p \text{ sol. particular },\ x_h \in \text{Nul}(A)\} \Leftrightarrow x_1 - x_p \in \text{Nul}(A).$

Sobre la Práctica 2

Definición: Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos K espacios vectoriales, se dice que una función

$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, si cumple:

- $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2),\ \ \forall\, u_1, u_2\ \in \mathbb{V}.$
- $T(\lambda u) = \lambda T(u),\ \ \forall\, u \in \mathbb{V}$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Nota:
Esto es equivalente a decir que, para toda combinación lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in \mathbb{V}$, *se cumple* $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k)$.

Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos K espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal:

- **Recordatorio 1:** Se dice que $\mathbb{V}$ es el dominio de T y $\mathbb{W}$ el codominio de T.
- **Recordatorio 2:** La Imagen de T es el conjunto:
  Im$(T) = \{w \in \mathbb{W}$tal que$, v \in \mathbb{V}, T(v) = w\}$
- **Definición 1:** Si $S \subset \mathbb{V}, S \neq \emptyset$, se llama Imagen de S por T, al conjunto:
  $T(S) = \{w \in \mathbb{W} : \exists x \in S, w = T(x)\} \subseteq \mathbb{W}$.
- **Definición 2:** Si $U \subset \mathbb{W}, U \neq \emptyset$, se llama Preimagen de U por T, al conjunto:
  $T^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{V} : T(x) \in U\} \subseteq \mathbb{V}$.
- **Definición 3:** Se llama **Núcleo** de F al conjunto:
  Nu$(T) = \{x \in \mathbb{V} : T(x) = 0_{\mathbb{W}}\} = T^{-1}(\{0_{\mathbb{W}}\}) \subseteq \mathbb{V}$.

Observaciones:

Para todo lo que sigue $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W} \Rightarrow$ es t.l.

a. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W} \Rightarrow T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$.

b. Si $\mathbb{V} =$ gen$\{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_m\} \Rightarrow$ Im$(T) =$ gen$\{T(v_1), \dots, T(v_m)\}$

c. Si S es subespacio de $\mathbb{V} \Rightarrow T(S)$ es subespacio de $\mathbb{W}$.

d. Si U es subespacio de $\mathbb{W} \Rightarrow T^{-1}(U)$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

e. **Toda t.l. queda univocamente determinada sobre una base.**
Más precisamente:
Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ espacios vectoriales, $B = \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $\{w_1,\ w_2,\ \dots w_n\} \subset \mathbb{W}$, existe una única transformación lineal $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ tal que: $F(v_1) = w_1,\ F(v_2) = w_2, \dots, F(v_n) = w_n$.

f. $\boxed{\text{dim(Nu}(T))\text{+ dim(Im}(T))\text{= dim}(\mathbb{V})}$

Clasificación de transformaciones lineales

Sea $T: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una función, con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Se dice que T es **monomorfismo** si es una transformación lineal inyetiva.

Se dice que T es **epimorfismo** si es una transformación lineal suryectiva.

Se dice que T es **isomorfismo** si es una transformación lineal biyectiva.

Recordatorio 1: $F: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es inyectiva si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$.
Esto es equivalente a decir F es inyectiva si $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Recordatorio 2: $F: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es suryectiva si Im(F)= Cod$(F) = \mathbb{W}$

Recordatorio 3: $F: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Observaciones:

a. $\boxed{T \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow \text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}.}$.

b. T es epimorfismo $\Leftrightarrow$ Im$(T) = W \Leftrightarrow$ dim(ImT)) $=$ dim(W).

c. Si dim($\mathbb{V}$)$= n$ y dim($\mathbb{W}$)$= m$:

   1) Si T es monomorfismo $\Rightarrow$ dim$(\mathbb{V}) \leq$ dim$(\mathbb{W})$.

   2) Si T es epimorfismo $\Rightarrow$ dim$(W) \leq$ dim$(\mathbb{V})$.

   3) Si T es isomorfismo $\Rightarrow$ dim$(W) =$ dim$(\mathbb{V})$.

Si $T: \mathbb{V} \longrightarrow W$ es un isomorfismo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V} \Rightarrow$ dim$(\mathbb{W}) = n$ y además $B' = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathbb{W}$ pues gen$\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ =Im(T)= $\mathbb{W} \Rightarrow \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathbb{W}$ porque son n vectores que generan $\mathbb{W}$.

Búsqueda de la TL inversa:

Si T es isomorfismo, aplicando T a cualquier base de $\mathbb{V}$, obtenemos:

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \quad \vdots = \vdots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

Como $\{w_1, \ldots,\ w_n\}$ es una base de $\mathbb{W}$, sobre esta base queda definida $T^{-1} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} T^{-1}(w_1) = v_1 \\ T^{-1}(w_2) = v_2 \\ \quad \vdots = \vdots \\ T^{-1}(w_n) = v_n \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones que involucran a una TL

Con la ecuación que involucra a una transformación lineal pasa lo mismo que pasaba cuando resolvíamos un sistema lineal.

$$\text{T(v)=w}_0 \begin{cases} \text{si } w_0 \notin \text{Im}(T) & \text{el sistema es incompatible.} \\ \text{si } w_0 \in \text{Im}(T) \text{ y } T \text{ es monomorfismo} & \text{la ecuación tienen solución única.} \\ \text{si } w_0 \in \text{Im}(T) \text{ y } T \text{ no es monomorfismo} & \text{la ecuación tienen infinitas soluciones.} \\ \text{Todas las soluciones son de la forma} & x_p + x_N;\ x_N \in \text{Nu}(T) \text{ y } x_p \text{ sol. particular.} \end{cases}$$

Definición: Si $B = \{v_1, \dots,\ v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, $B' = \{w_1, \dots,\ w_m\}$ base de $\mathbb{W}$ y $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ t.l, la matriz $\left[[T(v_1)]^{B'} \mid \dots \mid [T(v_n)]^{B'}\right] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se llama la matriz de T con respecto a las bases B y B' y se nota: $[T]_B^{B'}$, es la única matriz que cumple:

$$[T(x)]^{B'} = [T]_B^{B'}[x]^B$$

Observaciones:

En lo que sigue $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ t.l. y B y B' bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente.

a. Las columnas de $[T]_B^{B'}$ son las coordenadas de los generadores de la Im(T), por lo tanto rg($[T]_B^{B'}$)=dim(Im(T)).

b. $x \in$ Nu(T) $\Leftrightarrow [T]_B^{B'}[x]_B = 0_{\mathbb{K}^m}$

c. Nul($[T]_B^{B'}$) es el subespacio de las **coordenadas de los vectores de $\mathbb{V}$ que están en el Nu(T).**

d. $w \in$ Im$(T) \Leftrightarrow \exists\ x \in \mathbb{V}$ tal que $T(x) = w \Leftrightarrow [T(x)]^{B'} = [w]^{B'} \Leftrightarrow [T]_B^{B'}[x]^B = [w]^{B'}$.

e. Si $G : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$ es t.l. y B'' es base de U, entonces se cumple: $[G \circ T]_B^{B''} = [G]_{B'}^{B''}[T]_B^{B'}$.

f. Si T es un isomorfismo, $[T]_B^{B'} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y es inversible.

g. Se cumple $[T^{-1}]_{B'}^{B} = \left([T]_B^{B'}\right)^{-1}$

Sobre la Práctica 3

Definición de Producto Interno: Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se dice que una función $< .,. >: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno (**P.I.**), si cumple:

- $< \alpha u + \beta v, w >= \alpha < u, w > +\beta < v, w >, \forall u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$ y $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$
- $< v, u >= \overline{< u, v >},\ \forall u,\ v \in \mathbb{V}$
- $< u, u > > 0, \forall u \in \mathbb{V}, u \neq 0_{\mathbb{V}}$ y $< u, u >= 0 \iff u = 0_{\mathbb{V}}$

Consecuencias inmediatas:

a $< u, u >\in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{V}$

b $< u, \alpha v + \beta w >= \bar{\alpha} < u, v > +\bar{\beta} < u, w >,\ \forall u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$

c $< 0_{\mathbb{V}}, u >= 0,\ \forall u \in \mathbb{V}$

Nociones inducidas por un P.I.

En lo que sigue $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con P.I.

Norma: $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$ (norma inducida por el P.I.)

Cumple, las propiedades imprescindibles para ser una medida:

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. $\|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{V}}$

Distancia: Si $u, v \in \mathbb{V}$ la distancia entre u y v se define como $d(u, v) = \|u - v\| = \|v - u\|$

Ortogonalidad: Si u y v son vectores de $\mathbb{V}$ se dice que u y v son ortogonales si $< u, v >= 0$. (Se nota $u \perp v$)

Teorema: Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, todo P.I. queda definido sobre una base de $\mathbb{V}$. Más aún si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, todo P.I. puede escribirse como:

$$\langle u, v\rangle = \overline{[v]^B}^T G_B [u]^B = [u]^{B^T} G_B \overline{[v]^B}$$

Con $G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, matriz hermítica y definida positiva.

$G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es hermítica si y sólo si $G_B = \overline{G_B}^T$
$G_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es definida positiva si y sólo si $X^T G_B\, X > 0,\ \forall\, X \in \mathbb{K}^n - \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Propiedades:

En todo espacio vectorial $\mathbb{V}$ con producto interno, valen las siguientes propiedades:

a. **Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz**:

$$|\,\langle u, v\rangle\,| \leq ||u||\ ||v||, \quad \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

b. **Desigualdad triangular**:

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \quad \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

c. **Teorema de Pitágoras** : Si $\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Como consecuencia de la desigualdad de C-B-S, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, tenemos:

$$-||u||\ ||v|| \leq\ \langle u, v\rangle\ \leq ||u||\ ||v||, \quad \forall\, u,\ v \in \mathbb{V}.$$

$$\text{Si } u \neq 0_{\mathbb{V}} \neq v:\ -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{||u||\ ||v||} \leq 1.$$

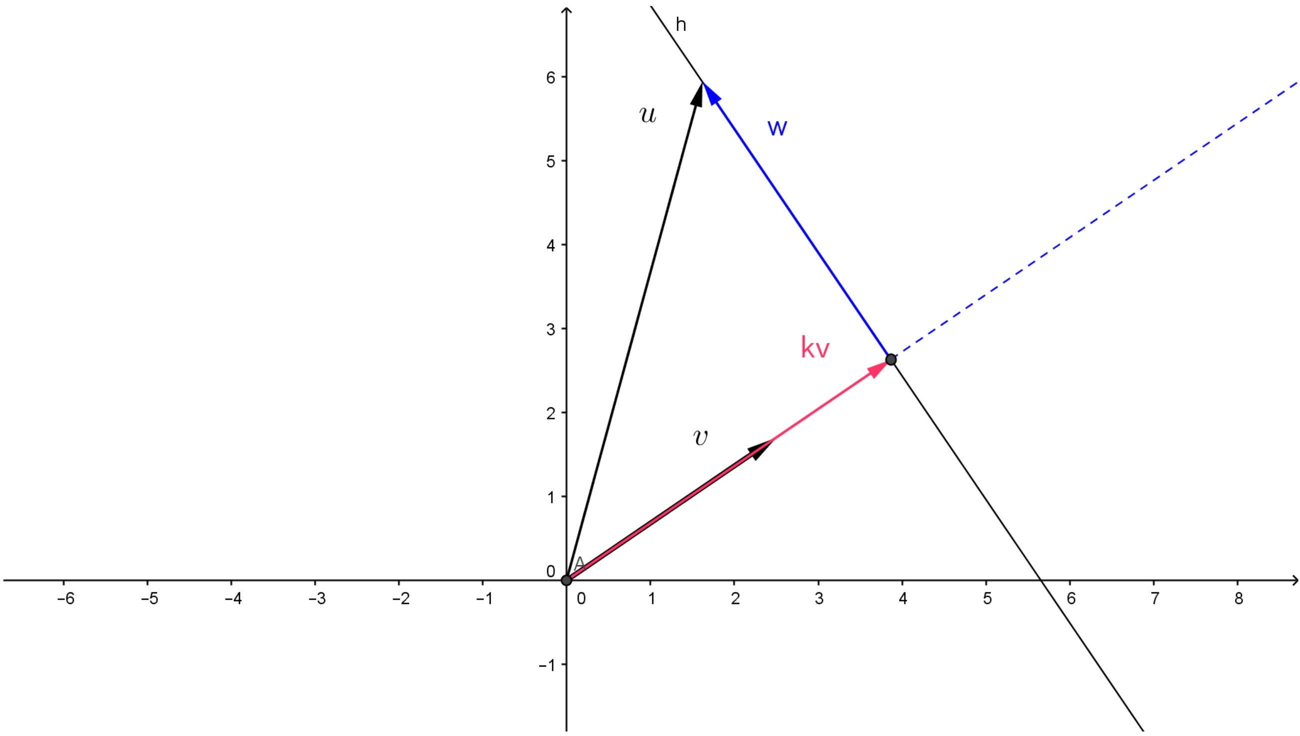
Entonces, podemos extender la definición de ángulo, para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

Definición: Si u y $v \in \mathbb{V}$, $\mathbb{R}$ espacio vectorial, $u \neq 0_{\mathbb{V}} \neq v$, se dice que θ es el **ángulo que forman** u **y** v si :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||\ ||v||}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Se nota $\alpha(u, v) = \theta$.

Descomposición Ortogonal



$\forall u, v \in \mathbb{V}, v \neq 0_{\mathbb{V}}$, si tomamos $c = \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}$, y $w = u - (\frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2})v$, se cumple:

$$u = cv + w \text{ con } w \perp u$$

Definición: Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{V}$ es un **conjunto ortogonal**, si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall \ i \neq j$.
Aclaración: Todo conjunto con un sólo elemento, $\{v_1\}$ se considera ortogonal.

Definición: Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{V}$ es un **conjunto ortonormal**, si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall \ i \neq j$ y $\|v_i\|^2 = 1$,
$\forall i = 1, \ldots, k$.

Observación

- Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un **conjunto ortogonal que no contiene al vector nulo** $\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i.

Definición:
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Se dice que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base ortogonal de** $\mathbb{V}$ si es una base de $\mathbb{V}$ y es un conjunto ortogonal.
$(\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j.)$

Definición:
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Se dice que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base ortonormal de** $\mathbb{V}$ si es una base de $\mathbb{V}$ y es un conjunto ortonormal.
O sea, $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$.

Descomposición con respecto a una base ortonormal

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal :
$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n$

$\|u\|^2 = |\langle u, v_1 \rangle|^2 + |\langle u, v_2 \rangle|^2 + \cdots + |\langle u, v_n \rangle|^2$

Proyección Ortogonal

Sea $S \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$, se dice que v' es la **proyección ortogonal** de v sobre S si:

1. $v' \in S$.
2. $v - v' \in S^{\perp}$.

Notación: Se escribe $P_S(v) = v'$

Dos observaciones importantes

a Si existe, $P_S(v)$ es única

b Para todo $v \in \mathbb{V}$, $P_S(v)$ es el punto de S más cercano a v: $\boxed{\mathsf{d}(v, P_S(v)) \leq \mathsf{d}(v, v_S)\ \forall\ v_S \in S.}$

Más observaciones

Si existe, $P_S(v)\ \forall\ v \in \mathbb{V}$:

- $v - P_S(v) = P_{S^{\perp}}(v),\ \forall v \in \mathbb{V}.$
- $v = P_S(v) + P_{S^{\perp}}(v)\ \forall v \in \mathbb{V}.$
- $\mathbb{V} = S \oplus S^{\perp}$. Además, si $\mathbb{V}$ es de dimensión finita $(S^{\perp})^{\perp} = S$
- Si $v \in \mathbb{V}$ y $v = v_S + v_{S^{\perp}}$ con $v_S \in S$ y $v_{S^{\perp}} \in S^{\perp}$.

Otras Propiedades Importantes

a $P_S(v) = v \iff v \in S.$

b $P_S(v) = 0_{\mathbb{V}} \iff v \in S^{\perp}.$

c $P_S(\lambda v + w) = \lambda P_S(v) + P_S(w),\ \forall\ v, w \in \mathbb{V} y \forall\ \lambda \in K.$

d Lo anterior demuestra que, $P_S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es t.l. y además $\boxed{\text{Im}(P_S) = S, \text{Nu}(P_S) = S^{\perp}.}$

e $P_S(P_S(v)) = P_S(v)\ \forall\, v \in \mathbb{V}$

Fórmula de la proyección ortogonal.

Sea S un subespacio en $\mathbb{V}$, $v \in \mathbb{V}$, y $B_S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base ortogonal de S:

$$P_S(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\|v_k\|^2}v_k$$

Problema de mínimos cuadrados
Planteo del problema

Planteo del problema en $\mathbb{K}^n$.

En $\mathbb{K}^n$, el P.I. canónico es $\langle x, y\rangle = y^*x = \bar{y}^T x$

Sabemos que si $\boxed{A \in \mathbb{K}^{m\times n}}$ y $b \in \mathbb{K}^m$ el sistema $AX = b$ es compatible sí y sólo sí $b \in$ Col(A).

Si $b \notin$ Col(A), buscamos $\hat{x} \in \mathbb{K}^n$ tal que dist$(A\hat{x}, b)$ sea "la menor posible".

Por lo visto, la menor distancia la alcanzaremos cuando $A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$

$$\overline{A}^T(b - A\hat{x}) = 0_{\mathbb{K}^n} \Longleftrightarrow \boxed{\overline{A}^T A\hat{x} = \overline{A}^T b} \quad \textbf{ECUACIONES NORMALES.}$$

Si estamos trabajando en $\mathbb{R}^n$ los signos de conjugación no son necesarios.

Definición : Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, se dice que $\hat{x}$ es la **solución por mínimos cuadrados** de $Ax = b$ si $A\hat{x}$ **realiza** la mínima distancia a b, o sea
dist$(A\hat{x}, b) \leq$ dist$(Ax, b) \Longleftrightarrow A\hat{x} = P_{Col(A)}(b)$.

Se llama error cuadrático medio a la diferencia:
ECM=$\|b - A\hat{x}\|^2$

Observaciones:

- El problema de mínimos cuadrados siempre tiene solución.
- $Nul(\bar{A}^T A) = Nul(A)$
- $rg(\bar{A}^T A) = rg(A)$
- Como Nul(A) = Nul$(\bar{A}^T A)$ todas las soluciones del problema de mínimos cuadrados pueden escribirse en la forma: $\hat{x} = x_p + x_N$ con $x_N \in$ Nul(A).
- Todo $x \in \mathbb{K}^n$ puede escribirse $x = x_F + x_N$, con $x_F \in$ Fil(A) y $x_N \in$ Nul(A) pues Fil$(A) \oplus$ Nul$(A) = \mathbb{K}^n$ pues Fil$(A)^\perp$ = Nul(A).
Entonces: $\hat{x} = x_F + x_N$ y $||\hat{x}||^2 = ||x_F||^2 + ||x_N||^2$

Luego $||\hat{x}|| \geq ||x_F||$

Por lo tanto, la solución del problema de mínimos cuadrados de mínima norma es el vector
$x_F \in$ Fil(A) que cumple $Ax_F =$ proy$_{\text{Col}(A)}(b) \Leftrightarrow \overline{A}^T Ax_F = \overline{A}^T b$
$x_F : \overline{A}^T Ax_F = \overline{A}^T b$ y $x_F \perp$ Nul(A)

- El problema de mínimos cuadrados tiene solución única
$\Longleftrightarrow rg(\bar{A}^T A) = rg(A) = n$.
En ese caso, se dice que A tiene rango columna máximo.
- Si A es de rango columna máximo, $\bar{A}^T A\hat{x} = \bar{A}^T b \Longleftrightarrow \hat{x} = (\bar{A}^T A)^{-1}\bar{A}^T b$

Definición: Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $rg(A) = n$, se llama seudoinversa de A a la matriz
$A^{\#} = (\bar{A}^T A)^{-1}\bar{A}^T$