Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2021)

Guía de Trabajos Prácticos Nº6

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Preliminares y notación

En todo lo que sigue $\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Esto es,

$$\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\right\}.$$

Definición.

Una *forma cuadrática* en $\mathbb{R}^n$ es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que puede expresarse en la forma

$$Q(x) = x^T Ax \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$.
La *forma polar* de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define por

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Nótese que si $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$, entonces $\Phi(x, y) = y^T Ax$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nótese también que $\Phi(x, x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Algunas propiedades.

En todo lo que sigue $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será una forma cuadrática de la forma $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$.

1. *Cambio de variables.* Al efectuarse el cambio de variables $x = My$, mediante la matriz invertible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la expresión de la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$, en las nuevas variables y, adopta la forma $\tilde{Q}(y) = y^T M^T AMy$.
2. *Ejes principales.* Si $A = P\Lambda P^T$ es una diagonalización ortogonal de A, con $P = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces el cambio de variables $x = Py$ elimina los términos cruzados de $Q(x)$ y la forma cuadrática adopta la forma $\tilde{Q}(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. Las rectas que generan las columnas de P se denominan *ejes principales* de Q.
3. *Acción de Q sobre sus ejes principales.* Obsérvese que $Q(u_i) = \lambda_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
4. *Conjuntos de nivel.* Dado $c \in \mathbb{R}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $Q(x) = c$ se denomina *el conjunto de nivel* c de Q y lo denotaremos mediante
$$\mathcal{N}_c(Q) := \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = c\}.$$
5. *Imagen de la esfera unitaria.* Los valores de Q sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ están unívocamente determinados por sus valores sobre la esfera unitaria
$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$
Más precisamente, para todo $x \neq 0$ vale que $Q(x) = \|x\|^2 Q(\hat{x})$, donde $\hat{x}$ es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector x.
6. *Extremos sobre la esfera unitaria.* El cambio de variables ortogonal $x = Py$ es una isometría y en consecuencia $\|x\| = \|y\|$. De aquí se infiere que
$$\{Q(x) : \|x\| = 1\} = \left\{\tilde{Q}(y) : \|y\| = 1\right\}.$$

En particular, si los autovalores de A están ordenados de mayor a menor, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, se puede deducir que

a) $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \max\limits_{\|y\|=1} \tilde{Q}(y) = \lambda_1$,
b) $\{x \in S_{n-1} : Q(x) = \lambda_1\} = S_{n-1} \cap \mathrm{nul}(A - \lambda_1 I)$,
c) $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \min\limits_{\|y\|=1} \tilde{Q}(y) = \lambda_n$,
d) $\{x \in S_{n-1} : Q(x) = \lambda_n\} = S_{n-1} \cap \mathrm{nul}(A - \lambda_n I)$.

7. Combinando los dos puntos anteriores se deduce que
$$\lambda_n \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_1 \|x\|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
Si $\lambda_n > 0$ (i.e., si Q es definida positiva), se obtiene que:
a) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que
$$\frac{Q(x)}{\lambda_1} \leq \|x\|^2 \leq \frac{Q(x)}{\lambda_n},$$
b) para todo $x \in \mathcal{N}_c(Q)$, con $c > 0$, vale que
$$\frac{c}{\lambda_1} \leq \|x\|^2 \leq \frac{c}{\lambda_n}.$$
8. *Formas canónicas.* Se puede comprobar que existe una matriz inversible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que el cambio de variables $x = My$ permite expresar a Q en la forma
$$\tilde{Q}(y) = y^T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} y, \tag{1}$$
donde p, q y r son, respectivamente, las cantidades de autovalores positivos, negativos y nulos de A, (contados con sus multiplicidades). La representación de Q en la forma (1) se denomina *la forma canónica de Q*.

Para un catálogo de superficies de nivel en $\mathbb{R}^3$.

Se trata de un breve recordatorio de objetos geométricos que presuponemos conocidos.

1. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^3.$$
Sus conjuntos de nivel son
$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Esfera centrada en el origen de radio } \sqrt{c} & \text{si } c > 0, \\ 0_{\mathbb{R}^3} & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$
2. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 - x_3^3.$$
Sus conjuntos de nivel son
$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Hiperboloide de una hoja} & \text{si } c > 0, \\ \text{Cono} & \text{si } c = 0, \\ \text{Hiperboloide de dos hojas} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Se trata de tres superficies de revolución alrededor del eje x_3: la primera y la tercera se obtienen rotando la hipérbola $x_1^2 - x_3^2 = c$, y la segunda rotando la recta $x_1 = x_3$.

3. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2.$$
Sus conjuntos de nivel son
$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Cilindro circular} & \text{si } c > 0, \\ \text{Recta } x_1 = x_2 = 0 & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$
4. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$Q(x) := x_1^2 - x_2^2.$$
Sus conjuntos de nivel son
$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Cilindro hiperbólico} & \text{si } c \neq 0, \\ \text{Par de planos que se cortan} & \text{si } c = 0. \end{cases}$$
5. Sea $Q(x)$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por
$$Q(x) := x_1^2.$$
Sus conjuntos de nivel son
$$\mathcal{N}_c(Q) = \begin{cases} \text{Par de planos paralelos} & \text{si } c > 0, \\ \text{Par de planos coincidentes} & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $x^T A x$ con $A \in \mathrm{Sim}_2(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

(**c**) $Q(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$.

---

2. Clasificar cada una de las formas cuadráticas del **Ejercicio 1.** y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

---

3. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $x^T A x$ con $A \in \mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(**a**) $Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(**b**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(**c**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

(**d**) $Q(x) = x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

(**e**) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

---

4. Clasificar cada una de las formas cuadráticas del **Ejercicio 3.** y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

: *representar Q en el sistema de coordenadas cartesiano definido por sus ejes principales y observar que mediante cambios de escala se obtiene alguna de las formas presentadas en el catálogo. Cambios de escala transforman circunferencias en elipses, esferas en elipsoides, y viceversa.*

---

5. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^T A x$, donde

$$A = \frac{1}{324}\begin{bmatrix} 76 & 10 & -10 \\ 10 & 61 & 20 \\ -10 & 20 & 61 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Mediante un cambio de variables ortogonal $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados. ¿Cuáles son los ejes principales de Q?

(**b**) Caracterizar geométricamente las superficies de nivel $\mathcal{N}_{r^2}(Q)$, con $r > 0$, y graficarlas en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q.

(**c**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más cercanos al origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

(**d**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más lejanos del origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

---

6. Idéntico al anterior, pero utilizando la matriz

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

en la definición de Q.

---

7. Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

(**a**) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$.

(**b**) Verificar que para todo $x \in \mathbb{R}^3$ vale que $3\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 9\|x\|^2$.

(**c**) Caracterizar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ y, utilizando el resultado del inciso anterior, hallar los puntos de $\mathcal{N}_1(Q)$ cuya distancia al origen sea mínima y aquellos cuya distancia al origen sea máxima. ¿Qué valores tienen esas distancias?

: *comparar con el* **5.** *y formalizar conclusiones.*

---

8. Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$Q(x) := x^T(aI + bA)x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, y donde A es la matriz en base canónica de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre un subespacio unidimensional.

(**a**) Hallar los valores de a y b para que $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 5$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 2$.

(**b**) Para los valores hallados en el inciso anterior, y sabiendo que

$$\operatorname{col}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 4x_2 = 0\right\},$$

graficar el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) \leq 3\}$.

---

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica de traza nula tal que

$$\operatorname{nul}(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

y sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^TAx$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ es un vector cuya distancia al subespacio $\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ es 5, ¿qué valor debe tener la distancia de x_0 al $\operatorname{nul}(A - 2I)$ para que $Q(x_0) = 14$?

: *no se requiere hallar los coeficientes de A ni la expresión de x_0.*

10. Sea $Q(x) = x^T A x$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, con $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$. ¿Qué propiedades de A son necesarias y suficientes para que todos los conjuntos de nivel c de Q, con $c > 0$, sean acotados?

---

11. En cada uno de los siguientes casos, hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$, para

(**a**) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(**b**) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 4\sqrt{10}x_1x_2$.

:*¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos? Notar que en* (**a**) y (**b**) *las formas cuadráticas son de la forma* $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 2ax_1x_2$, *con* $a \in \mathbb{R}$, *y explicar los diferentes comportamientos de la solución problema en función de los posibles valores de* a.

---

12. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2.$$

(**a**) Observar que Q es definida positiva y hallar un cambio de variables $x = My$ tal que $\tilde{Q}(y) = Q(My) = \|y\|^2$.

(**b**) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo de $Q(x)$ sujetos a la restricción $9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = 1$ y determinar los vectores que los realizan.

---

13. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) := ax_1^2 + ax_2^2 + 2bx_1x_2,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(**a**) Hallar y graficar el conjunto de todos los pares (a, b) para los cuales Q es definida positiva.

(**b**) Hallar y graficar el conjunto de todos los pares (a, b) para los cuales

$$\min_{\|x\|=1} Q(x) = 0 \quad \text{y} \quad \max_{\|x\|=1} Q(x) = 4.$$

(**c**) Determinar los valores de a y b para los cuales existe un cambio de variables ortogonal $x = Py$, tal que $\tilde{Q}(y) := Q(Py) = 4y_1^2 + 9y_2^2$.

(**d**) Para $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$ hallar los puntos de la curva de nivel $Q(x) = 1$ más cercanos al origen. ¿Qué puede decirse de los más lejanos?

(**e**) Para $a = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$ hallar los puntos de la curva de nivel $Q(x) = 1$ más cercanos al origen. ¿Qué puede decirse de los más lejanos?

14. Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$Q_1(x) = 17x_1^2 + 108x_2^2 + 312x_1x_2, \qquad Q_2(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2.$$

(**a**) Graficar los conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q_2)$, con $c > 0$.

(**b**) Hallar $\max\limits_{x \in \mathcal{N}_8(Q_2)} Q_1(x)$ y $\min\limits_{x \in \mathcal{N}_8(Q_2)} Q_1(x)$.

(**c**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathcal{N}_8(Q_2)$ que maximizan $Q_1(x)$.

(**d**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in \mathcal{N}_8(Q_2)$ que minimizan $Q_1(x)$.