"... Máma, la libertad siempre la llevarás
Dentro del corazón
Te pueden corromper, te puedes olvidar
Pero ella siempre está..."
Charly García

Segunda Semana Guía 5- Curso 1.
Descomposición en Valores Singulares **D.V.S.**

Seguimos trabajando en $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$ con el respectivo producto interno canónico.

Consideremos $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
Vamos a demostrar que para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se puede encontrar una *factorización* relacionada con sus subespacios fundamentales ($\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Fil}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$ y $\mathrm{Nul}(A^T)$).

<u>Resultados previos:</u>

- $A^*A = \bar{A}^T A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz hermítica, semidefinida positiva.

  Es hermítica porque : $(A^*A)^* = \overline{(\bar{A}^T A)}^T = \bar{A}^T \overline{\bar{A}^T}^T = \bar{A}^T A$ ✓

  Es semidefinida positiva porque:

  $\forall\ x \in \mathbb{C}^n\ 0 \leq ||Ax||^2 = (\overline{Ax})^T(Ax) = \bar{x}^T\bar{A}^T Ax = \bar{x}^T(\bar{A}^T A)x.$

  Por lo tanto $(\bar{A}^T A)$ es una matriz hermítica que cumple con la definición de **matriz semidefinida positiva** en $\mathbb{C}^{n\times n}$ $\boxed{\bar{x}^T(\bar{A}^T A)x \geq 0}$.

- Recordemos que $\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{Nul}(\bar{A}^T A)$=$\mathrm{Nul}(A)$ y rg($\bar{A}^T A$)=rg(A).

- Toda matriz hermítica cumple que:

  a. **Todos sus autovalores son reales.**
  b. **Si v_1 y v_2 son autovectores de A, asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v_1 \perp v_2$. (En críollo: A autovalores distintos, corresponden autovectores ortogonales).**
  c. **Toda matriz hermítica es diagonalizable.**

  > $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica $\Leftrightarrow$ existe $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que
  >
  > $$A = UD\overline{U}^T,\ D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$
  >
  > Esto es equivalente a decir que A es hermítica $\Leftrightarrow$ existe una base **ortonormal** de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A.

Ya dijimos que la matrices simétricas en $\mathbb{R}^{n\times n}$ son un subconjunto de las matrices hermíticas. En $\mathbb{R}^{n\times n}$ este teorema puede expresarse:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow$ existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que

$$A = PDP^T,\ D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Esto es equivalente a decir que A es simétrica $\Leftrightarrow$ existe una base **ortonormal** de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.

- Como $(\bar{A}^T A)$ es una matriz semidefinida positiva $\Rightarrow$ además de ser diagonalizable (por ser hermítica), todos sus autovalores son no negativos (por ser semidefinida positiva).
  En o que sigue, vamos a ordenar los autovalores de $\overline{A}^T A$ de mayor a menor:
  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_n \geq 0$.
  Si rg$(\bar{A}^T A)$=k $\Rightarrow$ $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ y los primeros autovalores son estrictamente positivos.

Definición1

Valor singular: Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se dice que σ es un **valor singular** de A si $\sigma = \sqrt{\lambda}$, con λ autovalor de $\overline{A}^T A$.

Por las observaciones anteriores, si rg(A)=k, podemos ordenar los valores singulares de A de mayor a menor: $\sigma_1 \geq \dots \sigma_k > 0$ y $\sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_n = 0$.

OBSERVACIONES

Siempre consideramos $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y rg(A)= $k,\ 1 \leq k \leq n$.

1. Como $\overline{A}^T A$ es una matriz hermítica, existe una BON de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de $\overline{A}^T A$.
   Como ya dijimos, rg(A)=rg($\overline{A}^T A$)= $k \Rightarrow \overline{A}^T A$ tiene exactamente k autovalores estrictamente positivos y los demás son todos nulos.
   Por lo tanto, existe un BON de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de $\overline{A}^T A$, $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_k > 0$ y $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. Considerando la base B, para cada v_i se cumple:

   $$||Av_i||^2 = \overline{Av_i}^T (Av_i) = \bar{v}_i{}^T \bar{A}^T A\ v_i = \bar{v}_i{}^T (\bar{A}^T A)\ v_i = \bar{v}_i{}^T \lambda_i\ v_i = \lambda_i \bar{v}_i{}^T\ v_i = \lambda_i ||v_i||^2 = \lambda_i.$$

   Entonces: $||Av_i|| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$.

   Los valores singulares de A nos dicen *cuánto cambia la longitud de los autovectores* al ser multiplicados por la matriz A.

3. Considerando la base base B del item 1, $\{Av_1, \ldots Av_k\}$ es una base ortogonal de Col(A).

   Primero veamos que el conjunto $\{Av_1, \ldots Av_k\}$ es un conjunto ortogonal:

   $$\langle Av_i, Av_j\rangle = \overline{(Av_j)}^T (Av_i) = \overline{v_j}^T \overline{A}^T Av_i = \overline{v_j}^T (\overline{A}^T A) v_i = \overline{v_j}^T \lambda_i v_i = \lambda_i \overline{v_j}^T v_i.$$

   $$\langle Av_i, Av_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j. \\ \lambda_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

   Entonces, $Av_i \perp Av_j$ y como $\langle Av_i, Av_i\rangle = ||Av_i||^2 = \lambda_i > 0$, ninguno de estos vectores es nulo, por lo cual el conjunto $\{Av_1, \ldots, Av_k\}$ es un conjunto linealmente independiente formado por k vectores de Col(A)$\Rightarrow$ $\{Av_1, \ldots Av_k\}$ es una base ortogonal de Col(A).

   Entonces, el conjunto $\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{Av_k}{\sigma_k}\}$ es una BON de Col(A).

4. En B, el conjunto $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es una BON de Nul(A) y como (Nul(A))$^\perp$ =Fil(A) $\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_k\}$ es una BON de Fil(A).

Entonces, $\forall\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con rg(A)$= k$, al construir la base ortonormal de $\mathbb{C}^n$,

$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$, formada por autovectores de $\overline{A}^T A$ asociados a $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0, \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n$.

Hemos encontrado bases ortonormales de 3 de los 4 espacios fundamentales de la matriz A:

$\{v_1, \dots, v_k\}$ BON de Fil(A) en $\mathbb{C}^n$.

$\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ BON de Nul(A) en $\mathbb{C}^n$.

$\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{Av_k}{\sigma_k}\}$ BON de Col(A) en $\mathbb{C}^m$.

- Si formamos la matriz $V = [v_1|\dots|v_k|v_{k+1}|\dots|v_n]$, V es una matriz unitaria y si calculamos AV obtenemos:

$$AV = A[v_1|\dots|v_k|v_{k+1}|\dots|v_n] = [Av_1|\dots|Av_k|Av_{k+1}|\dots|Av_n]$$
$$AV = [Av_1|\dots|Av_k|0_{\mathbb{C}^m}|\dots|0_{\mathbb{C}^m}]$$

Definición 2

Si A es una matriz en $\mathbb{C}^{m\times n}$, de rg(A)=k, una **Descomposición en Valores singulares de A** es una **factorización** :

$$A = U\Sigma\overline{V}^T$$

con U y V matrices unitarias de $\mathbb{C}^{m\times m}$ y $\mathbb{C}^{n\times n}$ respectivamente y

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} D_k & 0_{k\times(n-k)} \\ \hline 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{m\times n},\ D_k = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix},\ \text{con}$$

$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ los valores singulares no nulos de A.

Por todo lo que vimos está practicamente demostrado el

Teorema de Descomposición en Valores Singulares.

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ existe una Descomposición en Valores Singulares de A **(D.V.S)**

Demostración:

Por lo que vimos sabemos que existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de $\bar{A}^T A$. Si rg(A)= $k \Rightarrow \bar{A}^T A$ tiene k autovalores no nulos y positivos. Formamos $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1 \geq \dots \lambda_k > 0$ y $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

$V = [v_1|\dots|v_k|v_{k+1}\dots|v_n]$ es una matriz unitaria.
Como $\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{Av_k}{\sigma_k}\}$ BON de Col(A), llamamos : $u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots u_k = \frac{Av_k}{\sigma_k}$ y agregamos los vectores necesarios para obtener una BON de $\mathbb{C}^m$, $B' = \{u_1.\dots, u_k, u_{k+1}, \dots u_m\}$.

Entonces $\{u_{k+1}, \dots u_m\}$ es una BON de $(\text{Col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(\overline{A}^T)$.

$U = [u_1|\dots|u_k|u_{k+1}|\dots u_m]$ es una matriz unitaria.
Entonces:

$$AV = A[v_1|\dots|v_k|\underbrace{v_{k+1}|\dots|v_n}_{\in \text{Nul}(A)}]$$

$$AV = [\underbrace{Av_1}_{\sigma_1 u_1}|\dots|\underbrace{Av_k}_{\sigma_k u_k}|Av_{k+1}|\dots|Av_n]$$

$$AV = [\sigma_1 u_1|\dots|\sigma_k u_k|0_{\mathbb{C}^m}|\dots|0_{\mathbb{C}^m}] \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

Vamos a escribir la matriz de la derecha como el producto de una matriz unitaria de $m \times m$ por otra matriz de $m \times n$, que será la que cargue con los valores singulares.

$$AV = \underbrace{[u_1|u_2|\ldots|u_k|u_{k+1}|\ldots|u_m]}_{U} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma$$

$$AV = U\ \Sigma$$

Despejamos A recordando que como V es unitaria, su inversa es $V^* = \overline{V}^T$

$$AVV^* = U\ \Sigma V^*$$

$$A = U\ \Sigma V^* = U\ \Sigma \overline{V}^T \checkmark$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, las matrices U y V son matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{m\times m}$ y $\mathbb{R}^{n\times n}$ respectivamente.

Ejemplo:

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, hallar una descomposición en valores singulares de A.

Resolución:

Con sólo ver A, ya sabemos que rg(A)= 2, pues tiene dos columnas linealmente independientes.

Vamos a calcular la matriz V de autovectores de $A^T A$ y los valores singulares de A. Para eso calculamos autovalores y autovectores de $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$P_{A^T A}(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda - 17) & -8 \\ -8 & (\lambda - 17) \end{vmatrix} = (\lambda - 17)^2 - 8^2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda - 17| = 8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda - 17 = 8$ o $\lambda - 17 = -8 \Rightarrow \lambda_1 = 25$ y $\lambda_2 = 9$.

Buscamos sus autovectores:

$\boxed{\text{Para } \lambda = 25 :}$

$$\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow S_{\lambda=25} = \text{gen}\{[1 \quad 1]^T\} \text{ y } S_{\lambda=9} = \text{gen}\{[-1 \quad 1]^T\}$$

Construimos la matriz ortogonal $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$ y $\sigma_2 = \sqrt{9} = 3$ Ya podemos construir también la matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

(Recordá que las dimensiones de Σ son las mismas que las de A.)

En este caso $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ahora entonces sólo nos queda construir la matriz ortogonal U.

Siguiendo con los pasos que hicimos para demostrar el teorema, sabemos que como rango de A es 2, ya tenemos dos0 nulos. (En este ejemplo no hay autovalores nulos de $A^T A$.)

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \checkmark$$

Para construir la matriz ortogonal U, necesitamos encontrar un vector unitario ortogonal a u_1 y u_2.

Podemos calcular el producto vectorial : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ahora buscamos un versor con esta dirección, por ejemplo elegimos $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Ahora entonces, ya tenemos la DVS de A:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}} \quad \mathbf{(1)}$$

Comentario: En la Descomposición hallada en **(1)**, podemos encontrar una forma más compacta todavía:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{U_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V_2^T}.$$ Esta es la llamada DVS reducida de A.

Definición 3

Si A es una matriz en $\mathbb{C}^{m\times n}$, de rg(A)=k, entonces la DVS de A puede escribirse de la forma:

$$A = [U_k|U_{m-k}] \left[\begin{array}{c|c} D_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \overline{V_k}^T \\ \hline \\ \overline{V_{n-k}}^T \end{array}\right]$$

Se llama **DVS reducida de A** a la factorización:

$$A = U_k D_k \overline{V_k}^T$$

- $U_k \in \mathbb{C}^{m\times k}$, matriz cuyas columnas forman una BON de Col(A).

- $D_k = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, matriz diagonal con los valores sing. no nulos de A : $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$.
- $\overline{V_k}^T$, matriz cuyas filas forman una BON de Fil(A).

Seudo inversa de Moore Penrose y relación con el problema de cuadrados mínimos

Definición 4

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, con rg($A$)$= k$ y $A = U_k D_k \overline{V_k}^T$, la DVS reducida de A, se llama **seudo inversa de Moore Penrose de A** a la matriz $A^\dagger = V_k D_k^{-1} \overline{U_k}^T$.

Propiedades de la seudo inversa de Moore Penrose.

1. $AA^\dagger = U_k D_k (\overline{V_k}^T V_k) D_k^{-1} \overline{U_k}^T = U_k D_k \mathrm{I}_k D_k^{-1} \overline{U_k}^T = U_k \overline{U_k}^T = P_{\mathrm{Col}(A)}$ (matriz de proyección sobre el subespacio col(A).)

2. $A^\dagger A = V_k D_k^{-1} (\overline{U_k}^T U_k) D_k \overline{V_k}^T = V_k \overline{V_k}^T = P_{\mathrm{Fil}(A)}$ (matriz de proyección sobre el subespacio Fil(A).)

3. Entonces, si queremos resolver el sistema $AX = b$ por cuadrados mínimos, estamos buscando $\hat{x}/A\hat{x} = P_{\mathrm{Col(A)}}(b)$.

   Busco $\hat{x}/A\hat{x} = AA^\dagger b \Rightarrow$ una solución particular de esta ecuación es $x^\dagger = A^\dagger b$ y si tenemos una solución particular sabemos que **todas** las soluciones del problema de cuadrados mínimos de $Ax = b$ pueden escribirse en la forma: $\hat{x} = x^\dagger + x_N$; con $x_N \in \mathrm{Nul}(A)$. Ahora bien $A^\dagger b = V_k D_k^{-1} \overline{U_k}^T b = \underbrace{V_k}_{BON \text{ de Fil}(A)} \underbrace{(D_k^{-1} \overline{U_k}^T b)}_{k\times 1} \in \mathrm{Fil}(A)$

   Entonces, toda solución del problema de cuadrados mínimos puede escribirse :
   $\hat{x} = \underbrace{x^\dagger}_{\in \mathrm{Fil}(A)} + x_N$; con $x_N \in \mathrm{Nul}(A)$.

   Como $\mathrm{Fil}(A) = (\mathrm{Nul}(A))^\perp \Rightarrow$ por el Teorema de Pitágoras $||\hat{x}||^2 = ||x^\dagger||^2 + ||x_N||^2$, con $x_N \in \mathrm{Nul}(A)$.

   $\boxed{||x^\dagger|| \leq ||\hat{x}|| \ \forall \ \hat{x} \text{ solución del problema de mínimos cuadrados.}}$

   $\boxed{x^\dagger = A^\dagger b \text{ es la solución de mínima norma del problema de cuadrados mínimos de } Ax = b \text{ .}}$

Ejemplos:

1. Hallar la seudo inversa de Moore Penrose de A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Resolución:
Ya obtuvimos la DVS reducida de A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V_2^T}$$

$$\boxed{A^\dagger = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{D_2^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{U_2^T}}$$

---

2. Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   a) Hallar la solución por mínimos cuadrados de norma mínima del problema $Ax = b$, con $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b) Hallar **todas** las soluciones del problema de mínimops cuadrados de $Ax = b$, con $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolución:

a) Buscamos la seudo inversa de Moore Penrose de A.Para eso necesitamos su DVS reducida:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 25 \\ 8 & 17 & 25 \\ 25 & 25 & 50 \end{bmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$P_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda-17) & -8 & -25 \\ -8 & (\lambda-17) & -25 \\ -25 & -25 & (\lambda-50) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda-9) & (-\lambda+9) & 0 \\ -8 & (\lambda-17) & -25 \\ -25 & -25 & (\lambda-50) \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{P}_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda-9) & 0 & 0 \\ -8 & (\lambda-25) & -25 \\ -25 & -50 & (\lambda-50) \end{vmatrix} = (\lambda-9)\begin{vmatrix} (\lambda-25) & -25 \\ -50 & (\lambda-50) \end{vmatrix}$$

$$P_{A^TA}(\lambda) = (\lambda-9)\{(\lambda-25)(\lambda-50) - 25.50\}$$

$$P_{A^TA}(\lambda) = (\lambda-9)\lambda(\lambda-75)$$

Los autovalores de A^TA son $\lambda_1 = 75,\ \lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = 0$.

Calculamos los autoespacios:

$$S_{\lambda=75} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=9} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=0} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

Ya podemos construir V_2 y D_2:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{75} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Buscamos U_2:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{75}}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{75}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{225}}\begin{bmatrix}15\\15\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-4\end{bmatrix}.$$

$$A^{\dagger} = V_2 D_2^{-1} U_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{75}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$x^{\dagger} = A^{\dagger} b$$

$$\boxed{\mathrm{x}^{\dagger} = A^{\dagger} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{75}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{11}{15} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix}}$$

b) Para hallar todas las soluciones del problema de mínimos cuadrados, basta con recordar que todas las soluciones pueden escribirse como:

$\hat{x} = x^{\dagger} + x_N$ con $x_N \in \mathrm{Nul}(A)$.

De la DVS reducida ya calculada, sabemoa que Nul(A)= gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

El conjunto de todas las soluciones del problema de mínimos cuadrados es:

$$\boxed{\hat{x} = x^{\dagger} + x_N = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{11}{15} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \; ; \; k \in \mathbb{R}.}$$