Reunión Curso 1.
Algunos aplicaciones de la Descomposición de Valores Ssingulares.

Recordemos que trabajamos siempre con $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ o $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y consideramos el P.I canónico en $\mathbb{C}^n$ ($\langle x, y\rangle = \overline{y}^T x$) o $\mathbb{R}^n$, ($\langle x, y\rangle = y^T x$).

Tomemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ con la que trabajamos en la reunión anterior.

Supongamos que consideramos una función (T.L.) definida por esta matriz, $T(x) = Ax$ y queremos analizar si al multiplicar los vectores por esta matriz, su norma crece o decrece, o queremos estudiar en qué dirección su norma tiene mayor crecimiento.

Para poder estudiar esta situación y comparar qué pasa con las distintas direcciones al ser multiplicadas por la matriz A, resulta natural considerar los vectores de la circunferencia unitaria de $\mathbb{R}^2$ cuando sus vectores son multiplicados por A.

Recordemos que ya habíamos estudiado la D.V.S. de esta matriz y obtuvimos:

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\text{U } \Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V_2^T} \text{ D.V.S. reducida de } A$$

Tomemos la base formada por los autovectores de $A^T A$, las columnas de V.

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{v_2} \right\} \text{ es una base ortonormal de } \mathbb{R}^2.$$

Con $A^T A v_1 = 25 v_1$, $A^T A v_2 = 9 v_2$.

Consideramos en conjunto $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / ||x||^2 = 1\}$

Si $x \in R^2$, $x = \alpha v_1 + \beta v_2$, si además $||x||^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 ||v_1||^2 + \beta^2 ||v_2||^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Si $x \in C_1 \Rightarrow ||Ax||^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T Ax = (\alpha v_1^T + \beta v_2^T)A^T A(\alpha v_1 + \beta v_2)$.

$||Ax||^2 = \alpha^2 v_1^T A^T A v_1 + \beta^2 v_2^T A^T A v_2 = \alpha^2 v_1^T 25 v_1 + \beta^2 v_2^T 9 v_2$

Como $v_1^T v_1 = 1$ y $v_2^T v_2 = 1$

$||Ax||^2 = 25\alpha^2 + 9\beta^2$ con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Entonces si busco máximo de $25\alpha^2 + 9\beta^2$, con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

$25\alpha^2 + 9\beta^2 \leq 25\alpha^2 + 25\beta^2 = 25(\alpha^2 + \beta^2) = 25$

$\text{máx}(||Ax||) = 5$ con $||x|| = 1$

El máximo se alcanza en $\pm v_1$ pues $||Av_1||^2 = v_1^T A^T A v_1 = 25 \Rightarrow ||Av_1|| = 5$

$25\alpha^2 + 9\beta^2 \geq 9\alpha^2 + 9\beta^2 = 9(\alpha^2 + \beta^2) = 9$

$\text{mín}(||Ax||) = 3$ con $||x|| = 1$

El mínimo se alcanza en $\pm v_2$ pues $||Av_2||^2 = v_2^T A^T A v_2 = 9 \Rightarrow ||Av_2|| = 3$

Además de la descomposición DVS de A, sabemos que:

$$Av_1 = \sigma_1 u_1 = \sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A(\pm v_1) = \pm 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$Av_2 = \sigma_2 u_2 = \sigma_2 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A(\pm v_2) = \pm 3 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Entonces la circunferencia de radio 1 se transformará en una elipse con vértices u_1 y u_2 en el plano generado por u_1 y u_2.

Con los vértices dados por $\pm 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\pm 3 \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Supongamos $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ es una transformación lineal y que $A = [T]_E^{E'} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, con E y E' las bases canónicas de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente.

Por el teorema de Descomposición en Valores Singulares, sabemos que existen matrices unitarias V y U de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente tales que :

$$A = U\,\Sigma\,\overline{V}^T,\ \Sigma = \left[\begin{array}{c|c} D_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \text{ con } D_k = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) y\ \sigma_i > 0 \text{ v.s. no nulos de } A.$$

Entonces:

1. Si B' es la base de $\mathbb{C}^m$ formada por las columnas de U, $M_{B'}^{E'} = U$
2. Si B es la base de $\mathbb{C}^n$ formada por las columnas de V, $M_B^E = V$ y $M_E^B = (M_B^E)^{-1} = \overline{V}^T$.
3. Entonces $\Sigma = [T]_B^{B'}$ donde B y B' son bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente. Pues

$$A = [T]_E^{E'} = U\,\Sigma\,\overline{V}^T = M_{B'}^{E'}[T]_B^{B'}M_E^B$$

Ejemplo:

Consideramos la transformación lineal, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como $T(X) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Nos piden encontrar bases **ortonormales** de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, B y B' tal que $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolución:

Ya tenemos hechas todas las cuentas referentes a la matriz A:

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\text{=U }\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{T}]_E^{E'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Si $M_{B'}^{E'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow B' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$

Si $M_E^B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M_B^E = (M_E^B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Por lo que $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

Entonces:

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$