15. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

(a) $\underset{\|x\|=1}{\text{máx}} \|Ax\| = \underbrace{25\sqrt{2}}_{\sigma_M}$, $\underset{\|x\|=1}{\text{mín}} \|Ax\| = \underbrace{15}_{\sigma_m}$ y $\underbrace{[1 \quad 1 \quad 0]}_{1\times 3}\, \underbrace{A}_{\boxed{3\times 2}} = \underbrace{[0 \quad 0]}_{1\times 2}$.

$\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Proposición 1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces, si σ_1 y σ_n son, respectivamente, el mayor y el menor valor singular de A, se tiene que*

$$\underset{\|x\|=1}{\text{máx}} \|Ax\| = \sigma_1 \quad y \quad \underset{\|x\|=1}{\text{mín}} \|Ax\| = \sigma_n.$$

4. rango$(A) = \underset{\geq 2}{r} =$ *número de v.s. no nulos de A.* $\Rightarrow \boxed{\text{rg} A = 2}$

Como $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^T$

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Nu(A^T) \overset{\text{VISTO}}{=} (\text{Col} A)^\perp}$$

a partir de una DVS reducida de A:

$$A = \underbrace{U_2}_{\substack{\text{dos col.} \\ \text{forman una} \\ \text{BON de Col A}}} . D . \underbrace{V_2^T}_{\substack{\text{dos col. que forman} \\ \text{una BON de fil(A)}}} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 25\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Como $\underbrace{\text{Col} A}_{\substack{\text{dim } 2 \\ (\text{pues rg} A = 2)}} \oplus (\text{Col} A)^\perp = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(\text{Col} A)^\perp = 1$

$$\Rightarrow \underline{(\text{Col} A)^\perp = \text{gen}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Por ej tomamos una BON de $\mathbb{R}^3$: $B_{\mathbb{R}^3} = \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \text{Col} A} ; \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in (\text{Col} A)^\perp} \Big\}$

$$\Rightarrow \underbrace{V_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Además: $\dim \operatorname{Fil} A = \dim \operatorname{Col} A = 2$ y $\operatorname{Fil} A \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underbrace{\operatorname{Fil} A = \mathbb{R}^2}$

Tomamos $\operatorname{Fil} A = \operatorname{gen}\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{BON DE } \mathbb{R}^2}\}$

$$\Rightarrow \underbrace{V_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$ - por ej -

17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

Voy a usar otra matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Si $x \in S_2$, queremos caracterizar $T(x)$:

1°) Escribimos x como CL de una base (apropiada) de $\mathbb{R}^3$.

Buscamos los vs de A: $A^T A = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow \sigma_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ave. asociado a } \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 90 \rightarrow \sigma_2 = \sqrt{90} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 360 \rightarrow \sigma_3 = \sqrt{360} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{B.ON. de } \mathbb{R}^3)$$

$\Rightarrow x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, como $x \in S_2$: $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

2°) Aplicamos T:

$$T(x) = \alpha T v_1 + \beta T v_2 + \gamma T v_3$$

$$Ax = \alpha \underbrace{A v_1}_{=0} + \beta A v_2 + \gamma A v_3 \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax = \beta A v_1 + \gamma A v_3 \quad , \quad \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax = \sqrt{90} \cdot \beta \frac{\boxed{A v_1}}{\sqrt{90}} + \sqrt{360}\, \gamma \frac{\boxed{A v_3}}{\sqrt{360}}$$

$$Ax = \sqrt{90} \cdot \beta \frac{1}{\sqrt{90}} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \sqrt{360}\, \gamma \frac{1}{\sqrt{360}} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Así, usando: 2. $\{\frac{Av_1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{Av_r}{\sigma_r}\}$ *es b.o.n. de* $\mathrm{col}(A)$;

$$\therefore \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{90}} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{360}} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ BON de } \mathrm{Col}(A) ,$$

las coordenadas de Ax, con respecto a $\mathcal{B}$:

$$[Ax]_{\mathcal{B}}^T = [\sqrt{90}\,\beta \quad \sqrt{360}\,\gamma]_{\mathcal{B}}^T \quad \text{con} \quad \beta^2 + \gamma^2 \leq 1$$

$$= (y_1 \quad y_2)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{90}\,\beta = y_1 & \Leftrightarrow \beta = \frac{y_1}{\sqrt{90}} \\ \sqrt{360}\,\gamma = y_2 & \Leftrightarrow \gamma = \frac{y_2}{\sqrt{360}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{y_1}{\sqrt{90}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{360}}\right)^2 \leq 1}$$

región elíptica con semiejes de longitud $\sqrt{90}$ y $\sqrt{360}$.