"... No es porque sea bueno
Tampoco soy tan malo.
Pero yo sé que
La sal no sala
Y el azúcar no endulza..."
Charly García

Reunión Curso 1.
Matrices ortogonales, unitarias.

En todo lo que sigue vamos a trabajar con el producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$ según corresponda.

Definiciones

Matriz unitaria: Se dice que una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **unitaria** si $U^{-1} = \bar{U}^T = U^* \Longleftrightarrow U\bar{U}^T = \mathrm{I_n}$

Matriz ortogonal: Se dice que una matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **ortogonal** si $P^{-1} = P^T \Longleftrightarrow PP^T = \mathrm{I_n}$

Matriz Hermítica: Se dice que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **hermítica** si $A = \bar{A}^T = A^*$

Matriz simétrica: Se dice que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **simétrica** si $A = A^T$

Ejemplos:

1. $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. U es unitaria pues:

$$U\bar{U}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ es ortogonal pues :

$$PP^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

1. Las matrices ortogonales son matrices unitarias con coeficientes reales. Por lo tanto, toda propiedad válida para matrices unitarias es válida para matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

2. U es unitaria $\iff$ sus columnas forman una BON de C^n. $U = [u_1|u_2|\ldots|u_n]$, U es unitaria $\iff U\bar{U}^T = \mathrm{I_n} \iff \mathrm{\bar{U}^T U = I_n} \iff \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \\ \bar{u}_2^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{bmatrix} [\mathrm{u_1|u_2|\ldots|u_n}] = \mathrm{I_n} \iff$

   $\bar{u}_1^T u_1 = 1,\ \bar{u}_1^T u_2 = 0,\ \ldots, \bar{u}_1^T u_n = 0$, o sea $\langle u_j, u_1\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 1 \\ 0 \text{ si } j \neq 1 \end{cases}$

   En general: $\langle u_j, u_i\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases} \iff \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una BON de $\mathbb{C}^n$

3. U es unitaria $\iff$ sus filas forman una BON de C^n.

4. U es unitaria $\Longrightarrow \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall x, y\ \in \mathbb{C}^n$.
   Se suele decir que U "conserva" el P.I.
   Por lo tanto: $||Ux|| = x\ \forall x \in \mathbb{C}^n$. Si P es ortogonal $\alpha(Px, Py) = \alpha(x, y)$.

5. Si λ es autovalor de U unitaria $\Rightarrow |\lambda| = 1$.

6. Si U unitaria $\Rightarrow |\det(U)| = 1$.

En $\mathbb{R}^{n\times n}$, las matrices ortogonales, conservan el P.I. y por lo tanto, la norma y los ángulos. ¿Qué hacen?Son, en definitiva las matrices de las rotaciones y las reflexiones. Más aún, se define como matriz de **rotación**, a una matriz ortogonal, P, tal que $\det(P) = 1$ y como matriz de **reflexión** a una matriz ortogonal, P, tal que $\det(P) = -1$.

Un ejemplo introductorio.

1. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (simétrica).
   Calculemos sus autovalores y autovectores.

   $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda-2) & -3 \\ -3 & (\lambda-2) \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda-2)^2 = 9 \Longleftrightarrow |\lambda-2| = 3 \Longleftrightarrow$
   $\lambda = 5$ o $\lambda = -1$.

   Busquemos los autoespacios:

   $S_{\lambda=5} = Nul(5\mathrm{I} - \mathrm{A})$:

   $$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{ gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   $S_{\lambda=-1} = Nul((-1)\mathrm{I} - \mathrm{A})$:

   $$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow S_{\lambda=-1} = \text{ gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Los autovectores correspondientes a autovalores distintos, no sólo son l.i. sino que son ortogonales.
   Por lo tanto A no sólo es diagonalizable, sino que es ortogonalmente diagonalizable.

   Puedo construir P una matriz formada por los autovectores de A, ortogonal.

   $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^T.$$

---

2. Si U es unitaria y D diagonal, si suponemos $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = UD\bar{U}^T \Rightarrow \bar{A}^T = \overline{(UD\bar{U}^T)}^T = U\bar{D}^T\bar{U}^T = U\bar{D}\bar{U}^T \Rightarrow AA^* = UD\bar{U}^TU\bar{D}\bar{U}^T = UD\bar{D}\bar{U}^T$.
   $A^*A = U\bar{D}\bar{U}^TUD\bar{U}^T = U\bar{D}D\bar{U}^T = AA^*$

<u>Matriz Normal:</u> Se dice que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es **normal** si $AA^* = A^*A$ Las matrices normales son semejantes unitariamente a una matriz diagonal en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Resultados fundamentales sobre matrices matrices hermíticas:

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz hermítica, se cumple:

- $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$
  $\langle x, Ay\rangle = (\overline{Ay})^T x = \overline{y}^T \overline{A}^T x = \overline{y}^T Ax = \langle Ax, y\rangle$ ✓
- $\overline{x}^T Ax \in \mathbb{R}$
  Para ver que un número complejo ,z, es real, basta con ver que $\overline{z} = z$ En particular si $z = (\overline{x}^T Ax)$, calculemos $\overline{z}$
- Si λ es autovalor de $A \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
- Si v_1 es autovector de A asociado a λ_1 y v_2 es autovector de A asociado a λ_2, $\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow v_1 \perp v_2$.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica $\iff$ existen matrices $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que $A = PDP^T$.

Es equivalente a decir:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica $\iff$ existe una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.

Ejemplo:

Dada $A = \begin{bmatrix} 22 & 2 & -4 \\ 2 & 19 & -2 \\ -4 & -2 & 22 \end{bmatrix}$, hallar su diagonalización.

Planteamos el polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-22 & -2 & 4 \\ -2 & \lambda-19 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-22 & -2 & 4 \\ -2 & \lambda-19 & 2 \\ 0 & 2\lambda-36 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-22 & -2 & 4 \\ -2 & \lambda-19 & 2 \\ 0 & 2(\lambda-18) & (\lambda-18) \end{vmatrix}.$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda-18)\begin{vmatrix} (\lambda-22) & -2 & 4 \\ -2 & (\lambda-19) & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-18)[(-4\lambda+72)+(\lambda^2-45\lambda+486)].$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda-18)(\lambda^2-45\lambda+486) = (\lambda-18)^2(\lambda-27).$$

Por lo tanto los autovalores de A son $\lambda = 18$ autovalor doble y $\lambda = 27$ autovalor simple.

Buscamos autovectores:

$S_{\lambda=18}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{2F_2-F_1, F_1/2} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -2x_1 + 2x_3.$$

$S_{\lambda=18} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Por las propiedades vistas, $S_{\lambda=27} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Podemos tomar:

$$D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces $A = QDQ^{-1}$

Esta Q no es ortogonal, pero podemos construir una matriz P ortogonal, tal que $A = PDP^T$.(Tarea para el hogar: Encuentre P ortogonal/ $A = PDP^T$.)