Clase práctica: Matrices simétricas y diagonalización ortogonal

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

   *a*) Comprobar que la sucesión de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y hallar el limite al que converge. ¿Qué significado geométrico tiene la matriz $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$?

   *b*) Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, calcular $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k x$.

   *c*) Hallar el conjunto
   $$\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to+\infty} \left\|A^k x\right\| = 1\}$$
   y describirlo geométricamente.

   *a*) Como $A$ es una matriz simétrica, es diagonalizable ortogonalmente. Esto es, podemos encontrar matrices $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal y $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonal tales que
   $$A = PDP^T$$
   Los autovalores de $A$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -\dfrac{1}{2}$. Los autoespacios asociados son
   $$S_1 = gen\{(1\ 1\ -1)^T\}, \quad S_{-\frac{1}{2}} = gen\{(1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 1)^T\}$$
   Para construir la matriz $P$ necesitamos una base ortonormal de estos espacios propios, por ejemplo,
   $$B_{S_1} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\}, \quad B_{S_{-\frac{1}{2}}} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T\}$$
   Entonces
   $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   Tenemos que
   $$A^k = PD^kP^T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} P^T$$
   Luego
   $$\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^T$$
   $$\lim_{k\to+\infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la matriz de una proyección ortogonal sobre el subespacio

$$S_1 = gen\{(1\ 1\ -1)^T\}$$

*b*) Dado $x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} A^k x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{18}}x_3 \end{pmatrix}$$

*c*) Como existe el límite

$$\lim_{k\to+\infty} A^k x$$

tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|A^k x\right\| = \left\|\lim_{k\to+\infty} A^k x\right\| = \sqrt{3}\left|\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3\right|$$

Entonces los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{k\to+\infty} \left\|A^k x\right\| = 1$ son los que verifican

$$\sqrt{3}\left|\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3\right| = 1$$

O sea

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad o \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{18}}x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(son dos planos paralelos).

2. *a*) Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que verifique simultáneamente:
   - es definida positiva;
   - el rango de $A - 2I$ es 1;
   - $A^3 - A^2$ es singular;
   - $gen\{(1\ 1\ 2)^t\}$ es subespacio propio de $A$.

   *b*) Para la matriz hallada, dar una base del subespacio $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^k x\}$ y, para cada $x \in S$, hallar $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k x\right\|$.

*a*) Como queremos que $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ sea una matriz simétrica, deben existen matrices $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ortogonal y $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diagonal tales que

$$A = PDP^T.$$

Las columnas de $P$ deben formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ compuesta por autovectores de $A$.

Veamos cuales son las condiciones que debe cumplir $A$ para así poder hallar sus autovalores y autovectores y poder escribir la diagonalización ortogonal de $A$.

- Para que $A$ sea definida positiva sus autovalores $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ deben verificar que $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$.
- Si el rango de $A - 2I$ es 1, entonces

$$dim(Nul(A - 2I)) = 3 - rg(A - 2I) = 2$$

Por lo tanto, al ser $S_{\lambda=2} = Nul(A - 2I)$, tenemos que $dim(S_{\lambda=2}) = 2$ y

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

- La matriz $A^3 - A^2$ es singular si y sólo si, 0 es autovalor de esta matriz. Sea $\lambda$ un autovalor de $A$, entonces $\lambda^3 - \lambda^2$ es autovalor de $A^3 - A^2$.

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad o \quad \lambda = 1$$

Como queremos que la matriz sea definida positiva, descartamos que $\lambda = 0$. Por lo tanto, el tercer autovalor de $A$ es

$$\lambda_3 = 1$$

- Tenemos que $gen\{(1\ 1\ 2)^t\}$ es subespacio propio de $A$. Como este subespacio tiene dimensión 1, debe estar asociado al autovalor simple $\lambda_3 = 1$.
El subespacio asociado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, es

$$S_2 = (S_1)^{\perp} = (gen\{(1\ 1\ 2)^t\})^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

Para armar la matriz $P$ necesitamos una base ortonormal de $S_2$. Una base posible es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1\ 0)^t, \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ -1)^t \right\}$$

Luego, tenemos que $A = PDP^t$ con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$b)$ Llamemos $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\right)^t$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$ y $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t$.
Hemos visto que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Entonces, dado $x \in \mathbb{R}^3$ existen constantes $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$

Luego,

$$A^k x = C_1 A^k v_1 + C_2 A^k v_2 + C_3 A^k v_3 = C_1 2^k v_1 + C_2 2^k v_2 + C_3 v_3$$

Para que exista $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x$ es necesario que $C_1 = C_2 = 0$ ya que $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k = +\infty$, así que nos queda $x = C_3 v_3$ y

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe} \lim_{k\to\infty} A^k x\} = S_1 = gen\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^t \right\}$$

Para $x = C_3 v_3 \in S$,

$$\lim_{k\to\infty} \left\|A^k x\right\| = \lim_{k\to\infty} \|C_3 v_3\| = |C_3|\, \|v_3\| = |C_3|$$