Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2021)

Guía de Trabajos Prácticos №5

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Preliminares y notación

En todo lo que sigue

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ definido por $\langle x, y\rangle := y^T x$, y $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ designa su norma inducida.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{R}^{n\times n}$ definido por $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(B^T A)$, y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius*.
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ vale que
$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle x, A^T y\right\rangle .$$
Consecuentemente,
   a) $\mathrm{nul}(A^T) = \mathrm{col}(A)^\perp$;
   b) $\mathrm{col}(A^T) = \mathrm{nul}(A)^\perp$;
   c) $\mathrm{nul}(A) = \mathrm{col}(A^T)^\perp$;
   d) $\mathrm{col}(A) = \mathrm{nul}(A^T)^\perp$.
4. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es
   - *ortogonal* si $A^T A = AA^T = I$.
   - *simétrica* si $A = A^T$.

Algunas propiedades

Caracterización de las matrices ortogonales.

Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. U es ortogonal.
2. U^T es ortogonal.
3. U es inversible y $U^{-1} = U^T$.
4. U preserva el producto escalar:
$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle , \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
5. Si $\{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{Uv_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ también lo es.
6. Las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
7. Las filas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
8. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|Ux\| = \|x\|$ (i.e., la transformación lineal $T(x) = Ux$ es una *isometría*.)

Caracterización de las matrices simétricas.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Son equivalentes:

- A es simétrica.
- $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal constituida por autovectores de A.
- A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Ejercicios

1. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ son ortogonales

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

: *En otras palabras, si se trata de una rotación, describir su ángulo; si se trata de una simetría ortogonal, describir la recta con respecto a la que se realiza la simetría.*

---

2. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son ortogonales

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ux$.

: *Por ejemplo, si T es una rotación, hallar el eje y el ángulo de rotación; si T es una simetría ortogonal, describir el subespacio con respecto al que se realiza la simetría; etcétera.*

---

3. Hallar la matriz de rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje generado por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

---

4. Explicar por qué las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son diagonalizables ortogonalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

: *¿A ojo?*

---

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

---

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T, \ v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

son autovectores asociados a los autovalores $2, -3, 5$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de A.

---

7. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$.

(**b**) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - I)$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

(**c**) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\text{tr}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

(**d**) $A^3 - 5A^2$ es singular, $\text{rango}(A - 3I) = 1$, el plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ es un autoespacio de A, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

: *¿A es única? ¿Por qué?*

---

8. Para cada una de la siguientes matrices

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}13 & -2 & -4\\ -2 & 10 & 2\\ -4 & 2 & 13\end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}17 & 2 & -2\\ 2 & 14 & 4\\ -2 & 4 & 14\end{bmatrix},$$

(**a**) hallar $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$,

(**b**) comprobar que $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T \in \left\{\lim\limits_{k\to\infty} A^k x : x \in \mathbb{R}^3\right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$.

---

9. Sea

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\ 1 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 10\end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que la sucesión de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y hallar el limite al que converge. ¿Qué significación geométrica tiene la matriz $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$?

(**b**) Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x$.

(**c**) Hallar el conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} \|A^k x\| = 1\right\},$$

y describirlo geométricamente.

10. En cada uno de los siguientes casos, hallar una descomposición en valores singulares de la matriz A, determinar bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores singulares de A, bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**b**) Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

12. Sean

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre fil(A) y la matriz de proyección sobre col(A).

13. En cada uno de los siguientes casos, hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

14. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

---

15. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

(**a**) $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15$, y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de $A^T A$ tal que $Av = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$.

: *¿A, es única?*

---

16. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\right\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max\limits_{x\in S_1} \|T(x)\|$ y $\min\limits_{x\in S_1} \|T(x)\|$?*

---

17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué significación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?*

---

18. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.