MATRICES SIMÉTRICAS Y ORTOGONALES

Dada la matriz $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Verificar que es una matriz ortogonal y caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ax$.

   Para ver si es una matriz ortogonal vemos si verifica: $AA^T = I$

   O bien observamos que sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   Para caracterizar la isometría ($\|T(x)\| = \|x\|$, esto se cumple por matriz ortogonal) observamos:

   $\det(A) = -1$ o bien $A^2 = I$ puesto que la matriz es simétrica: $AA^T = AA = I \longrightarrow T$ es una SIMETRÍA

   Calculamos sus autovalores: $\lambda_1 = 1$ doble y $\lambda_2 = -1$ simple.

   Con esto tenemos que el eje de simetría será $S_{\lambda=1}$ y la dirección la dará $S_{\lambda=-1}$.

   Calculamos los autoespacios: $S_{\lambda=1} = \text{gen}\left\{(1\ 1\ 0)^T ; (-1\ 0\ 1)^T\right\}$ y $S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{(1\ -1\ 1)^T\right\}$

2. Ya observamos que la matriz A es simétrica, diagonalizarla ortogonalmente.

   Tenemos que factorizar $A = PDP^T$, con P ortogonal y D diagonal.

   Ya tenemos los autovalores y autoespacios de A,

   necesitamos una BON de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A, observamos que $S_{\lambda=1} = (S_{\lambda=-1})^{\perp}$

   como los vectores que generan $S_{\lambda=1}$ no son ortogonales aplicamos el proceso de G-S

   por ejemplo: $S_{\lambda=1} = \text{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1\ 0)^T ; \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\ 1\ 2)^T\right\}$

   Así: $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1\ 0)^T ; \frac{1}{\sqrt{6}}(-1\ 1\ 2)^T ; \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ -1\ 1)^T\right\}$ es la base que necesitamos.

   Con esto podemos armar las matrices P y D:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ tales que } A = PDP^T.$$

3. Hallar la matriz de rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ alrededor del eje generado por $(1\ 1\ 0)^T$.

Llamemos $S = \text{gen}\left\{(1\ 1\ 0)^T\right\}$(eje de rotación)
calculamos $S^\perp = \text{gen}\left\{(1\ -1\ 0)^T;(0\ 0\ 1)^T\right\}$
Así tenemos una base ortonormal del espacio: $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1\ 0)^T;(0\ 0\ 1)^T;\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1\ 0)^T\right\}=\{v_1;v_2;v_3\}$
Definimos la rotación:

$T(v_1) = \cos\phi\, v_1 + \text{sen}\phi\, v_2$

$T(v_2) = -\text{sen}\phi\, v_1 + \cos\phi\, v_2$

$T(v_3) = v_3$

con $\phi = \dfrac{\pi}{6}$:

$T(v_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, v_1 + \dfrac{1}{2}\, v_2$

$T(v_2) = -\dfrac{1}{2}\, v_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, v_2$

$T(v_3) = v_3$

De aquí es inmediata la matriz: $[T]_B^B = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

con cambios de base obtenemos la matriz de la rotación en base canónica:

$$A = C_B^E\,[T]_B^B\,C_E^B = C_B^E\,[T]_B^B\,\left(C_B^E\right)^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$$