

# Matrices Simétricas y Hermíticas

Notas para los cursos 21 y 22 (J.L. Mancilla Aguilar)

## 1. Matrices Ortogonales y Unitarias

A lo largo de toda esta nota siempre se considerará el producto interno canónico en  $\mathbb{K}^n$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

Se dice que una matriz  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es *unitaria* si  $P^H P = P P^H = I$ , o, equivalentemente, si  $P^{-1} = P^H$ . Cuando  $P$  es real y unitaria, es decir  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P^{-1} = P^T$ , se dice que  $P$  es *ortogonal*.

Observamos que de las definiciones precedentes y del hecho que  $(P^H)^H = P$  se deduce inmediatamente que  $P$  es unitaria (ortogonal) si y sólo si  $P^H$  ( $P^T$ ) es unitaria (ortogonal). También es relativamente sencillo demostrar que si  $P$  es unitaria entonces  $\bar{P}$  y  $P^T$  también lo son.

Por ejemplo, si

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},$$

se comprueba inmediatamente que  $P_1, P_1^H$  y  $P_1^T$  son unitarias y que  $P_2$  y  $P_2^T$  son ortogonales. Observe que las columnas (filas) de  $P_1$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^2$  mientras que las columnas (filas) de  $P_2$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{R}^2$ . Esto no es casual, como lo muestra el siguiente teorema

**Teorema 1** Sea  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Son equivalentes:

- (a)  $P$  es unitaria (ortogonal).
- (b) Las columnas de  $P$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ).
- (c) Las filas de  $P$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ).

**Demostración.** Sólo demostraremos el caso en que  $P$  es unitaria, ya que el caso en que la matriz es ortogonal se deduce empleando los mismos argumentos.

Sea  $P = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$ , donde  $u_i \in \mathbb{C}^n$  es la  $i$ -ésima columna de  $P$ . Entonces

$$P^H P = \begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ \vdots \\ u_n^H \end{bmatrix} [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] = \begin{bmatrix} u_1^H u_1 & u_1^H u_2 & \dots & u_1^H u_n \\ u_2^H u_1 & u_2^H u_2 & \dots & u_2^H u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^H u_1 & u_n^H u_2 & \dots & u_n^H u_n \end{bmatrix},$$

y por lo tanto  $u_i^H u_j$  es el elemento del producto  $P^H P$  ubicado en la posición  $ij$ .

Luego,

$$P^H P = I \iff u_i^H u_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \iff \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ es b.o.n. de } \mathbb{C}^n.$$

De esto último deducimos inmediatamente que (a) implica (b), y también que (b) implica (a), ya que si las columnas de  $P$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$  entonces  $P^H P = I$  y, por ser  $P$  cuadrada, también  $P P^H = I$ . (Justifique esto último.)

Para probar las restantes equivalencias alcanza con demostrar, por ejemplo, que (a) es equivalente a (c). Pero ello se deduce inmediatamente de la equivalencia establecida entre (a) y (b), de que la transpuesta hermítica de una matriz unitaria es unitaria y del hecho de que las filas de  $P$  son las columnas de  $P^T$ .

En efecto, si vale (a), es decir, si  $P$  es unitaria, entonces  $P^T$  también es unitaria y por lo tanto, por (b), las columnas de  $P^T$ , que son las filas de  $P$ , forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$ .

Recíprocamente, si las filas de  $P$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$ , entonces  $P^T$  resulta unitaria y luego  $P$  también es unitaria. ■

El siguiente teorema da algunas propiedades importantes de las matrices unitarias.

**Teorema 2** Sea  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria.

Entonces vale lo siguiente:

- (a)  $(Px, Py) = (x, y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .
- (b)  $\|Px\| = \|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{C}^n$ .
- (c) Si  $\lambda$  es autovalor de  $P$  entonces  $|\lambda| = 1$ .
- (d)  $|\det(P)| = 1$ .
- (e) Si  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es unitaria entonces  $PQ$  es unitaria.

**Demostración.**

(a) Ejercicio.

(b) Se deduce de (a).

(c) Sea  $\lambda$  un autovalor de  $P$ . Entonces existe  $v \in \mathbb{C}^n$  no nulo tal que  $Av = \lambda v$ . Luego, usando (b) y teniendo en cuenta que  $\|v\| \neq 0$ , tenemos que

$$\|v\| = \|Av\| = |\lambda| \|v\| \quad \text{y de allí} \quad |\lambda| = 1.$$

(d) Se deduce de (c) teniendo en cuenta que el determinante de  $P$  es el producto de los autovalores de  $P$  repetidos según sus multiplicidades.

Otra posible demostración es la siguiente: teniendo en cuenta que  $P^H P = I$ ,

$$1 = \det(I) = \det(P^H P) = \det(P^H) \det(P).$$

Entonces, usando el siguiente resultado de determinantes:

$$\det(A^H) = \overline{\det(A)},$$

tenemos que  $1 = \overline{\det(P)} \det(P) = |\det(P)|^2$  y de allí resulta que  $|\det(P)| = 1$ .

(e) Ejercicio. ■

## 2. Diagonalización de Matrices Simétricas y Hermíticas

Recordemos que  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es hermítica si  $A^H = A$ . Cuando  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , como  $A^H = A^T$ , tenemos que  $A$  es hermítica si y sólo si es simétrica.

Consideremos la siguiente matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2),$$

y sus autovalores son  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = -2$ . Respecto de los autoespacios, estos son (comprobarlo):

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1 \ -1]^T\}, \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[1 \ 1]^T\},$$

con lo cual, llamando  $v_1 = [1 \ -1]^T$  y  $v_2 = [1 \ 1]^T$ ,  $B = \{v_1; v_2\}$  es base de  $\mathbb{R}^2$ . Como  $(v_1, v_2) = v_1^T v_2 = 0$ ,  $B$  es además una base ortogonal. Si normalizamos los vectores de  $B$ , llamando  $u_1 = v_1/\|v_1\| = [1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2}]^T$  y  $u_2 = v_2/\|v_2\| = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$ ,  $\{u_1; u_2\}$  es una b.o.n de  $\mathbb{R}^2$  compuesta por autovectores de  $A$ .

Si ahora consideramos las matrices

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$P$  es ortogonal y

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Observamos que  $A$  no sólo es diagonalizable, sino que además hemos podido elegir la matriz de autovectores que aparece en su diagonalización de forma tal que ésta sea ortogonal.

Consideremos ahora la matriz hermítica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2),$$

y sus autovalores son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 0$ , ambos reales. Respecto de los autoespacios de  $A$ , estos son (comprobarlo):

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[i \ 1]^T\}, \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[-i \ 1]^T\},$$

con lo cual, llamando  $v_1 = [i \ 1]^T$  y  $v_2 = [-i \ 1]^T$ ,  $B = \{v_1; v_2\}$  es base de  $\mathbb{C}^2$ . Además, como  $(v_1, v_2) = v_1^H v_2 = 0$ ,  $B$  es base ortogonal. Normalizando los vectores de  $B$  obtenemos  $u_1 = v_1/\|v_1\| = [i/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$  y  $u_2 = v_2/\|v_2\| = [-i/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$ , y entonces  $\{u_1; u_2\}$  es una b.o.n de  $\mathbb{C}^2$  compuesta por autovectores de  $A$ . Considerando ahora

$$P = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$P$  es unitaria y

$$A = PDP^{-1} = PDP^H.$$

Es decir, nuevamente,  $A$  no sólo es diagonalizable, sino que además hemos podido elegir la matriz de autovectores que aparece en su diagonalización de forma tal que no sólo es inversible, sino además unitaria.

A partir de los ejemplos anteriores, podemos conjeturar lo siguiente:

Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es hermítica:

1. Sus autovalores son reales.
2. Autovectores correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales (con el p.i. canónico).
3. Existe una b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  compuesta por autovectores de  $A$ . (En el caso en que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existe una b.o.n de  $\mathbb{R}^n$  compuesta por autovectores de  $A$ .)
4.  $A = PDP^H$  con  $P$  unitaria y  $D$  diagonal. (En el caso en que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = PDP^T$  con  $P$  ortogonal y  $D$  diagonal.)

En lo que sigue demostraremos que estas conjeturas son ciertas.

**Teorema 3** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es hermítica sus autovalores son reales.

Para demostrar éste y otros resultados, es conveniente tener en cuenta lo siguiente:  
Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces, si  $x, y \in \mathbb{C}^n$  tenemos que

$$(Ax, y) = (Ax)^H y = (x^H A^H) y = x^H (A^H y) = (x, A^H y),$$

con lo cual, cuando  $A$  es hermítica

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

**Demostración.** Sea  $\lambda$  un autovalor de  $A$ . Sea  $v$  un autovector asociado a  $\lambda$ , que podemos suponer unitario, es decir,  $\|v\| = 1$ . Entonces, por una parte

$$(Av, v) = (\lambda v, v) = \bar{\lambda}(v, v) = \bar{\lambda}.$$

Por otra parte

$$(Av, v) = (v, Av) = (v, \lambda v) = \lambda(v, v) = \lambda.$$

Luego  $\bar{\lambda} = \lambda$  y  $\lambda$  es necesariamente real.

**Teorema 4** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermítica y sean  $\lambda$  y  $\mu$  dos autovalores distintos de  $A$ . Entonces,  $\mathcal{S}_\lambda \perp \mathcal{S}_\mu$ .

**Demostración.** Basta ver que si  $v \in \mathcal{S}_\lambda$  y  $w \in \mathcal{S}_\mu$  entonces  $(v, w) = 0$ .

Teniendo en cuenta que  $\lambda$  y  $\mu$  son reales, tenemos que

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, w) = (Av, w) = (v, Aw) = (v, \mu w) = \mu(v, w).$$

Con lo cual  $\lambda(v, w) = \mu(v, w)$ . Como  $\lambda \neq \mu$ , necesariamente  $(v, w) = 0$ .

Para ver que es posible obtener una b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  en el caso en que la matriz es real) formada por autovectores de  $A$ , aceptemos sin demostración el siguiente resultado

**Lema 1** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermítica. Entonces, si  $\lambda$  es autovalor de  $A$ , sus multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.

**Teorema 5** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $\mathbb{R}^{n \times n}$ ) hermítica (simétrica), entonces existe una b.o.n. de  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) compuesta por autovectores de  $A$ .

**Demostración.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  los distintos autovalores de  $A$ . Como, por el Lema 1, las multiplicidades algebraica y geométrica de cada autovalor coinciden,

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{S}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_{\lambda_q}.$$

Por otra parte, por el Teorema 4,  $\mathcal{S}_{\lambda_i} \perp \mathcal{S}_{\lambda_j}$  si  $i \neq j$ . Entonces, si para cada  $i = 1, \dots, q$ , escogemos una b.o.n  $B_i$  de  $\mathcal{S}_{\lambda_i}$ , tenemos que  $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$  es b.o.n de  $\mathbb{C}^n$ . En efecto,  $B$  contiene  $n$  vectores, todos ellos de norma 1 por construcción, y estos son ortogonales dos a dos. Respecto de esto último, dados dos vectores de  $B$  tenemos dos posibilidades: i) ambos pertenecen a la misma base  $B_i$  y por lo tanto son ortogonales por ser  $B_i$  ortonormal; ii) pertenecen a bases  $B_i$  distintas, luego están en distintos autoespacios y por lo tanto también son ortogonales.

Si  $A$  es real, como  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , la b.o.n  $B_i$  de  $\mathcal{S}_{\lambda_i}$  puede escogerse de modo tal que los vectores que la componen sean reales. Entonces la unión de estas bases no sólo es b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  sino que también lo es de  $\mathbb{R}^n$ . ■

Hasta aquí hemos demostrado los puntos 1. a 3. de lo que hemos conjeturado. Antes de probar el punto 4., conviene introducir las siguientes definiciones.

**Definición 1**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *diagonalizable ortogonalmente* si existen  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonal tales que

$$A = PDP^T.$$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es *diagonalizable unitariamente* si existen  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria y  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonal tales que

$$A = PDP^H.$$

Es obvio que toda matriz diagonalizable unitaria u ortogonalmente es, en particular, diagonalizable. Además, por lo que ya sabemos sobre diagonalización de matrices, las columnas de la matriz  $P$  son autovectores de  $A$ . Entonces, queda claro que si  $A$  es diagonalizable unitariamente, necesariamente existe una b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  compuesta por autovectores de  $A$  y que si  $A$  es diagonalizable ortogonalmente, entonces necesariamente existe una b.o.n de  $\mathbb{R}^n$  compuesta por autovectores de  $A$ .

Por otra parte, si es posible hallar una b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  compuesta por autovectores de  $A$ , es inmediato que podemos factorizar  $A$  en la forma

$$A = PDP^H$$

con  $P$  unitaria y  $D$  diagonal (formamos  $P$  poniendo como columnas los autovectores de  $A$  que componen la b.o.n y  $D$  poniendo los autovalores de  $A$  en la diagonal y cero en el resto).

Cuando  $A$  es real y existe una b.o.n de  $\mathbb{R}^n$  compuesta por autovectores de  $A$ , la matriz  $P$  que obtenemos poniendo como columnas los autovectores de  $A$  que componen la b.o.n es ortogonal, y la matriz diagonal  $D$  que se forma con los autovalores de  $A$  es real, con lo cual es posible obtener una factorización de  $A$  en la forma

$$A = PDP^T,$$

con  $P$  ortogonal y  $D$  real y diagonal.

En conclusión

**Teorema 6**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) es diagonalizable unitariamente (ortogonalmente) si y sólo si existe una b.o.n de  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) compuesta por autovectores de  $A$ .

Combinando este último resultado con el Teorema 5 obtenemos

**Teorema 7** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $\mathbb{R}^{n \times n}$ ) es hermítica (simétrica) entonces es diagonalizable unitariamente (ortogonalmente).

En general, no es cierto que una matriz diagonalizable unitariamente sea necesariamente hermítica (ver ejemplos de la práctica). Sin embargo, sí es cierto que toda matriz diagonalizable ortogonalmente es simétrica:

**Ejercicio.** Demostrar que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable ortogonalmente entonces  $A$  es simétrica.

Resumimos lo visto hasta aquí en el siguiente

**Teorema 8** ( Teorema Espectral)

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermítica. Entonces

1. Todos sus autovalores son reales.
2. Autoespacios asociados a diferentes autovalores son mutuamente ortogonales.
3.  $A$  es diagonalizable unitariamente.
4. Si  $A$  es real, y por lo tanto simétrica,  $A$  es diagonalizable ortogonalmente. Además vale la recíproca, es decir, si  $A$  es diagonalizable ortogonalmente entonces es simétrica.

**Ejemplo.**

Diagonalizar ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A$  es  $p_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$  y por lo tanto sus autovalores son  $\lambda_1 = 7$  doble y  $\lambda_2 = -2$  simple.

Los autoespacios asociados a cada uno de esos autovalores son

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \text{gen}\{[1 \ 0 \ 1]^T, [-1 \ 2 \ 0]^T\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{gen}\{[-2 \ -1 \ 2]^T\}.$$

Observe que  $\mathcal{S}_{\lambda_1} \perp \mathcal{S}_{\lambda_2}$  como afirma el Teorema Espectral. Para obtener una diagonalización ortogonal de  $A$  necesitamos una b.o.n de  $\mathbb{R}^3$  compuesta por autovectores de  $A$ . Para ello buscamos bases ortonormales de cada uno de los autoespacios y luego tomamos la unión de ellas.

Es claro que una b.o.n de  $\mathcal{S}_{\lambda_2}$  es  $B_2 = \{[-2/3 \ -1/3 \ 2/3]^T\}$ . Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base de  $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ ,  $\{[1 \ 0 \ 1]^T, [-1 \ 2 \ 0]^T\}$ , y luego normalizando los vectores resultantes, obtenemos la siguiente b.o.n. de  $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ :  $B_1 = \{[1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}]^T, [-1/\sqrt{18} \ 4/\sqrt{18} \ 1/\sqrt{18}]^T\}$ .

Finalmente, considerando

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

tenemos que  $A = PDP^T$  es la diagonalización ortogonal de  $A$  buscada.