Álgebra II (Primer cuatrimestre, 2021)

Guía de Trabajos Prácticos N$^{\underline{o}}$4

[En construcción]

Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

A. N. Kolmogorov

Preliminares

En todo lo que sigue

1. $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{K}^n$ es el $\mathbb{K}$-espacio euclídeo canónico y $\|\cdot\|$ designa su norma inducida.
3. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^n$ y $x \in \mathbb{K}^n$, decimos que x_k *tiende a* x, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$
En tal caso x se llama *el límite de la sucesión* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{K}^{n\times n}$ definido por $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^*A)$ y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius.*
5. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A_k *tiende a* A, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\|_F = 0.$$
En tal caso A se llama *el límite de la sucesión* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

Definiciones

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un *autovalor de* A, cuando existe un vector no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un *autovector de* A *correspondiente al autovalor* λ.
2. El conjunto de todos los autovalores de A se llama *el espectro de* A, y se lo denota mediante $\sigma(A)$.
3. Si $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio $\mathbb{S}_\lambda := \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ se llama el *autoespacio correspondiente a* λ. La dimensión de $\mathbb{S}_\lambda$ se llama la *multiplicidad geométrica de* λ y la se denotaremos mediante $\mu(\lambda)$.
4. El polinomio $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ se denomina *el polinomio característico de* A. Nótese que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.
5. La *multiplicidad algebraica* de $\lambda \in \sigma(A)$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y la designaremos mediante $m(\lambda)$:
$$m(\lambda) = \max\left\{k \in \mathbb{N} : \chi_A(x) = (x-\lambda)^k q(x),\ \text{con } q \in \mathbb{K}[x]\right\}.$$
6. Si $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A *es semejante a* B cuando existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.
7. Decimos que A es diagonalizable cuando A es semejante a una matriz diagonal.

8. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, utilizaremos la notación $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ para designar a la matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

9. Dadas p matrices $A_i \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, utilizaremos la notación $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ para designar a la matriz diagonal en bloques

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Algunas propiedades

Matrices diagonalizables.

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
   a) A es diagonalizable.
   b) Existe una base $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A.
   c)
   $$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{nul}(A - \lambda I).$$
   d)
   $$\chi_A(x) = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} (x-\lambda)^{\mu(\lambda)}.$$
2. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que
   $$A^k\left(\sum_{j=1}^n c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k v_j,$$
   donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$.

Teorema espectral.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$. A es diagonalizable si y sólo si existen matrices $G_1, G_2, \ldots, G_q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_q, \tag{1}$$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

- G_i es la proyección sobre $\operatorname{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\operatorname{col}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \cdots + G_q = I$.

El desarrollo (1) se denomina la *descomposición espectral* de A, y las G_i se llaman los *proyecciones espectrales* asociadas.

Forma canónica de Jordan.

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe una matriz inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = PJP^{-1}$, donde $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ está en la *forma canónica de Jordan*. Esto significa que J es una matriz diagonal en bloques, con $J = \operatorname{diag}\big(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_p}(\lambda_p)\big)$ y

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_i}.$$

J es única salvo permutaciones de sus bloques diagonales. Las matrices $J_{n_i}(\lambda_i)$ se llaman *bloques de Jordan* con autovalor λ_i de índice n_i. Nótese que la cantidad de bloques de Jordan coincide con la máxima cantidad de autovectores linealmente independientes que posee A.

Para una demostración de este Teorema puede consultarse el libro de Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

Semejanza de matrices.

Dos matrices son semejantes si y solamente si tienen la misma forma canónica de Jordan.

Ejercicios

---

1. En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

---

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \ v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \ v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

respectivamente.

(**a**) Hallar una base de $\mathrm{nul}(A)$ y una base de $\mathrm{col}(A)$.

(**b**) Hallar una solución particular de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$.

(**c**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$

(**d**) Explicar por qué la ecuación $Ax = v_1$ no tiene solución.

: *Si se halla la expresión de A, el ejercicio se auto-destruye y no sirve para nada.*

---

3. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$\mathrm{nul}(A - 3I) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right\},$$
$$\mathrm{nul}(A - 5I) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

¿Es única? Si la respuesta es negativa, hallar otra. Si la respuesta es afirmativa, explicar por qué.

---

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente de los parámetros reales a, b, c definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\chi_A(x) = \det(A - xI) = 9x - x^3$. ¿$A$ es diagonalizable? Si la respuesta es afirmativa, hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

(**b**) Para $c = 0$, hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a, b \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

---

5. Sea

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 16 & -1 & 30 \\ -8 & 14 & 12 \\ 8 & 4 & 24 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar y graficar el conjunto de todos los $a_0 \in \mathbb{R}$ tales que la matriz $A + a_0 I$ es inversible.

(**b**) Hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tales que la matrix $A^2 + a_1 A + a_0 I$ es inversible.

---

6. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -1$.

(**c**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\operatorname{tr}(A) = 6$.

: *Nótese que si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $p \in \mathbb{C}_m[x] \setminus \operatorname{gen}\{1\}$, *entonces*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

---

7. Dos especies comparten el mismo ecosistema. La primera, la *presa*, se multiplicaría indefinidamente si estuviera sola. La segunda, la *depredadora*, se alimenta de la presa, por lo que si se quedara sola se extinguiría por falta de alimentos. La evolución de la cantidad de individuos de las dos especies x_n, y_n se puede modelar por un sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{10}\right) x_n - p y_n & \text{(ecuación de evolución de la presa),} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \left(1 - \frac{4}{10}\right) y_n & \text{(ecuación de evolución de la depredadora),} \end{cases}$$

donde $p > 0$, que se denomina el *parámetro de predación.*

(**a**) Notar que en la primera ecuación, el coeficiente $1 + \frac{2}{10}$ significa que en ausencia de la segunda (i.e., $y_n = 0$), la primera especie crece a una tasa del 20 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $-p$ significa que la presencia de la segunda (i.e., $y_n > 0$) contribuye negativamente al crecimiento de la primera.

(**b**) Notar que en la segunda ecuación, el coeficiente $1 - \frac{4}{10}$ significa que en ausencia de la primera (i.e. $x_n = 0$), la segunda especie se extingue a una tasa del 40 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $\frac{1}{2}$ significa que la presencia de la primera (i.e., $x_n > 0$) contribuye al crecimiento de la segunda: cada pareja de individuos de la primera contribuye a la existencia de un nuevo individuo de la segunda en el siguiente ciclo.

(**c**) Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -p \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

donde $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}$ representa las cantidades iniciales de individuos de las dos especies.

(**d**) Hallar los valores de p para los cuales la matriz del sistema resulta diagonalizable.

(**e**) Para cada $p \in \{0.175, 0.16, 0.1\}$ analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

---

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar el espectro de A y comprobar que A es diagonalizable.

(**b**) Usando la descomposición espectral de A comprobar que existe $M \in \mathbb{R}^+_*$ tal que

$$\|A^n - G_1\|_F \leq M \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n,$$

donde G_1 es la matriz de la proyección sobre $\operatorname{nul}(A-I)$ en la dirección de $\operatorname{col}(A-I)$. Utilizar este resultado para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = G_1.$$

---

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(**a**) Comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0$$

y concluir que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

(**b**) Comprobar que el conjunto $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \lim\limits_{k\to\infty} A^n x = 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**c**) Comprobar que el conjunto $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^n x \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**d**) Comprobar que $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \in \left\{ \lim_{k\to\infty} A^n x : x \in \mathbb{S} \right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^n x = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

---

10. Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices:

$$A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \ A_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

---

11. Determinar cuáles de las siguientes parejas de matrices A_1 y A_2 son semejantes, y en caso de serlo hallar B inversible tal que $A_1 = BA_2B^{-1}$:

(**a**) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -13 & -57 \\ -2 & 13 & 9 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$

(**b**) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -6 & 10 & 6 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}, \ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 8 & 22 & -12 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$

---

12. Comprobar que las siguientes matrices son semejantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

y hallar matrices inversibles $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$A_1 = B_1 A_0 B_1^{-1} \text{ y } A_2 = B_2 A_0 B_2^{-1}.$$

---

13. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$, resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico:

$$(\mathbf{a}) \ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{b}) \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{c}) \ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

---

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(**b**) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

---

15. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

$$(\mathbf{a})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{b})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{c})\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

---

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 25 & -14 & -4 \\ -2 & 4 & 14 \\ -10 & 2 & 25 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(**b**) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

---

17. Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Y.$$

---

18. Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} Y$$

y determinar para qué valores iniciales $Y(0) \in \mathbb{R}^3$ la norma de $Y(t)$ es acotada para $t \to +\infty$.