Episodio 17-Epílogo.

Autovalores y Autovectores.

Departamento de Matemática
FIUBA

Definición: Dados $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, un **autovalor** de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$, que cumple $T(v) = \lambda v$.
Se dice que v es **autovector** de T asociado a λ.
Llamamos **autoespacio** de T asociado a λ al subespacio $S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}, T(v) = \lambda v\}$

- La definición no tiene , obviamente, ninguna novedad con respecto a la definición dada para matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Más aún todo lo visto para matrices, puede entenderse como un caso particular de esta definición: el espacio vectorial considerado es $\mathbb{K}^n$ y la transformación lineal $T(X) = AX$.
- Si λ_0 es autovalor de $T \Rightarrow T - \lambda_0 I$ es una transformación lineal no inyectiva.

- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son autovalores distintos de T asociados respectivamente a los autovectores $\{v_1, \ldots, v_k\}$
  Entonces $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es l.i.
  $\boxed{\text{A autovalores distintos corresponden autovectores l.i.}}$
- Como consecuencia de la observación anterior:
  Si $S_{\lambda_1}, \ldots, S_{\lambda_k}$ son autoespacios de T correspondientes a autovalores distintos $\Rightarrow S_{\lambda_1}, \ldots, S_{\lambda_k}$ están en suma directa.
  $S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} \subseteq \mathbb{V}$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplos

- Sea $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial con Producto Interno y $S \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, si consideramos $T(v) = proy_S(v) \Rightarrow \lambda = 1$ es autovalor de T asociado al autoespacio S y $\lambda = 0$ es autovalor de T asociado a $S^{\perp}$.
- Si T es una t.l. no inyectiva, o sea dim(Nu(T))> 0, $\lambda = 0$ es autovalor de T y $S_{\lambda=0}$ =Nu(T).
- Si consideramos $(D - \lambda I) : \mathbb{C}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ por lo visto en la práctica de t.l. que Nu($(D - \lambda I)$)=gen$\{e^{\lambda x}\} \Rightarrow 0$ es autovalor de $(D - \lambda I)$ y su autoespacio asociado es $S = gen\{e^{\lambda x}\}$.
- Entonces, si analizamos el operador $D : \mathbb{C}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ y buscamos sus autovalores y autovectores, queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R} / \exists y \not\equiv 0, D(y) = \lambda y \Leftrightarrow y' = \lambda y \Leftrightarrow y = ke^{\lambda x}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de D y para cada λ la función $ke^{\lambda x}$ es autovector de D.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ encontrar los autovalores y autovectores de T es muy sencillo.
Sea $B = \{v_1, \ v_2, \ \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, por definición v es un autovector de T asociado al autovalor λ si:

$$T(v) = \lambda v.$$
$$[T(v)]^B = [\lambda v]^B = \lambda [v]^B$$
$$[T]_B^B [v]^B = \lambda [v]^B$$

Entonces:
v es un autovector de T asociado al autovalor $\lambda \iff [v]^B$ es autovector de $[T]_B^B$ asociado al autovalor λ.

Observación:

- Si B y B' son bases de $\mathbb{V}$:

  $$[T]_B^B = M_{B'}^B [T]_{B'}^{B'} M_B^{B'}$$

  Como ya dijimos, $[T]_B^B \sim [T]_{B'}^{B'}$

  Entonces los polinomios característicos de estas matrices son iguales y por lo tanto tiene sentido hablar de **polinomio característico de** T.

> Definición: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformación lineal se llama **polinomio característico de** T a $P_T(\lambda) = det(\lambda \mathrm{I} - [\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}})$ donde B es cualquier base de $\mathbb{V}$.

Definición: Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ se dice que T **es diagonalizable** si existe una base de V formada por autovectores de T.

Observaciones:

a. Si $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $T(w_i) = \lambda_i w_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si T es diagonalizable su representación matricial con respecto a una base de V formada por sus autovectores es una matriz diagonal.

b. Como todas las representaciones matriciales de T con respecto a una base B de $\mathbb{V}$ son semejantes, entonces T es diagonalizable $\Leftrightarrow$ su representación matricial, $[T]_B^B$,con respecto a cualquier base B de $\mathbb{V}$ es diagonalizable.

Para calcular autovalores y autovectores de T, usando su representación matricial, la base de entrada y de salida de esa representación matricial debe ser la misma.

Comentarios sobre matrices no diagonalizables en $\mathbb{C}^{n\times n}$.
Si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no es diagonalizable es porque existe algún autovalor cuya multiplicidad algebraica no coincide con la multiplicidad geométrica. En ese caso, no podemos encontrar una matriz diagonal D semejante a A. Pero se prueba que sí podemos encontrar una matriz *más sencilla*, diagonal por bloques, semejante a esa matriz A. Son las llamadas matrices de Jordan que no vamos a estudiar en detalle.
Vamos a ver concretamente el caso en $\mathbb{C}^{3\times 3}$. Si A es una matriz de $\mathbb{C}^{3\times 3}$ no diagonalizable, se cumple alguno de los siguientes casos:

$\boxed{\text{Caso 1:}}$

A tiene un autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.
Llamemos λ_1 al autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1 y λ_2 al autovalor de A de multiplicidad algebraica 1.

En este caso, podemos probar que $A \sim J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

O sea, existe Q tal que $A = Q\ J_1\ Q^{-1}$

Buscamos Q tal como la buscamos en el caso de A diagonalizable:

$A = Q\ J_1\ Q^{-1} \iff A\ Q = Q\ J_1$

Si explicitamos las columnas de $Q = [V_1|V_2|V_3]$:

$$A\,[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, igualando columna a columna:

$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow V_1$ es autovector de A asociado a λ_1.

$AV_2 = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_1 + \lambda_1 V_2 \Rightarrow (A - \lambda_1 \mathrm{I})\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1$

$AV_3 = \lambda_2 V_3 \Rightarrow V_3$ es autovector de A asociado a λ_2.

Entonces: construimos la matriz $Q = [V_1|V_2|V_3]$, de la siguiente forma:
Asociado al autovalor simple λ_2 buscaremos su correspondiente autoespacio S_{λ_2} y obtendremos un generador, V_3.
Buscamos un generador de S_{λ_1}, V_1, y luego buscamos V_2, resolviendo el sistema no homogéneo $(A - \lambda_1 \mathrm{I})\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1$.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$

A tiene un autovalor, λ, de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1.

En este caso, podemos probar que $A \sim J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Otra vez buscamos Q tal que $A\,Q = Q\,J_2$.

Si $Q = [V_1|V_2|V_3]$:

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3]\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

Igualando columna a columna otra vez:
$AV_1 = \lambda V_1 \Rightarrow V_1$ es autovector de A asociado a λ.
$AV_2 = V_1 + \lambda V_2 \Rightarrow (A - \lambda \mathrm{I})\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1$.
$AV_3 = V_2 + \lambda V_3 \Rightarrow (A - \lambda \mathrm{I})\mathrm{V}_3 = \mathrm{V}_2$.
Entonces, en este caso tenemos también un algoritmo para construir la matriz Q.

Caso 3:

A tiene un autovalor, λ, de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2.

En este caso, podemos probar que $A \sim J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Otra vez necesitamos encontrar $Q = [V_1|V_2|V_3]$ tal que :

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Tarea para el hogar