Ejercicio 22

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$b \in \text{Col}(A) = \text{col}_1(A) + \text{col}_3(A)$.

Nos piden mostrar que existen, $a, b \in \mathbb{R}$ y $v_1,\ v_2 \in \text{col}(A)$ tal que:

$$\{y \in \text{col}(A) : \text{dist}(b, y) = 1\} = \{(a_1 + \cos(\theta))v_1 + (a_2 + \text{sen}(\theta))v_2 : \theta \in [0, 2)\}\textbf{(1)}$$

Entonces primero busquemos quiénes son los vectores que cumplen dist$(b.y) = 1$ con $y \in \text{col}(A)$.

Si $y \in$ col(A) $\Rightarrow y \in$ gen $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ = gen $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Para trabajar con mayor comodidad podemos encontrar un conjunto ortonormal de generadores de col(A)(de esta manera podemos aplicar el teorema de Pitágoras cuando sea necesario) :

$$\text{col(A)} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{22}} \\ \frac{4}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{22}} \end{bmatrix}}_{u_2} \right\}$$

Entonces, buscamos $y = k_1 u_1 + k_2 u_2$ tal que dist$(b, y) = 1$.

Haciendo las cuentas necesarias, obtenemos:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 11u_1 + \tfrac{3\sqrt{22}}{2}u_2 \Rightarrow \text{dist}(b, y) = \left|\left|(k_1 - 11)u_1 + (k_2 - \tfrac{3\sqrt{22}}{2})u_2\right|\right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\left|(k_1 - 11)u_1 + (k_2 - \frac{3\sqrt{22}}{2})u_2\right|\right|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (k_1 - 11)^2 + (k_2 - \frac{3\sqrt{22}}{2})^2 = 1, \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Si parametrizamos esta última circunferencia reemplazando:

$\cos(\theta) = k_1 - 11$ y $\operatorname{sen}(\theta) = k_2 - \frac{3\sqrt{22}}{2}$.
Podemos escribir:
$y = k_1u_1 + k_2u_2 = (\cos(\theta) + 11)u_1 + (\operatorname{sen}(\theta) + \frac{3\sqrt{22}}{2})u_2$.
Luego todos los $y \in$ Col(A) que cumplen la condición, pueden describirse como:
$y = (\cos(\theta) + 11)u_1 + (\operatorname{sen}(\theta) + \frac{3\sqrt{22}}{2})u_2$, que es la forma expresada en **(1)** con u_1 y u_2 los vectores antes señalados.

Obviamente los vectores de la base no son únicos, pues existen infinitas bases ortonormales de este subespacio y . por lo tanto esta expresión no es única.
Queda como tarean para el hogar, encontar otra base ortonormal y ”calcar” el desarrollo de este ejercicio.