“Máma, la libertad siempre la llevarás
Dentro del corazón
Te pueden corromper, te puedes olvidar
Pero ella siempre está...”
Charly García

-PRODUCTO INTERNO 3ª Reunión
(Gram-Schmidt- Descomposición QR-Breve comentario Teorema de Riesz)

El método de Gram-Schmidt se basa en aplicar una y otra vez la propiedad de la proyección ortogonal:

$$v - P_S(v) \in S^{\perp}, \forall\, S \subseteq \mathbb{V} \text{ subespacio de } \mathbb{V}.$$

Si tenemos una base $B = \{v_1,\ v_2, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el teorema de Gram-Schmidt no sólo nos asegura que, para todo espacio vectorial de dimensión finita, existe una base ortogonal sino que, generosamente, nos muestra cómo construirla a partir de cualquier base, con una fórmula recursiva.

Demostración:

Vamos a construir una nueva base $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{V}$.

De manera tal que :

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{gen}\{v_1\} = \text{gen}\{w_1\} \\ S_2 &= \text{gen}\{v_1,\ v_2\} = \text{gen}\{w_1,\ w_2\} \\ &\vdots = \vdots \\ S_n &= \text{gen}\{v_1,\ v_2 \ldots, v_n\} = \text{gen}\{w_1,\ w_2, \ldots, w_n\} \end{aligned}$$

Definimos:

$w_1 = v_1$.

Claramente $w_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$, pues v_1 es elemento de una base y por lo tanto $v_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$.

$w_2 = v_2 - P_{S_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$.

Entonces, $w_2 \in$ gen$\{v_1, v_2\}$ pues es combinación lineal de ellos.

Además $w_2 \perp w_1$, pues $w_2 \in {S_1}^{\perp}$ por definición de proyección ortogonal. $w_2 \neq 0_{\mathbb{V}}$ pues si fuera el vector nulo, $v_2 = P_{S_1}(v_2) \Rightarrow \{v_1,\ v_2\}$ sería l.d.(ABSURDO) pues $\{v_1,\ v_2\}$ está incluido en una base.

Supongamos que tenemos que construir un tercer vector:

$$w_3 = v_3 - P_{S_2}(v_3) = v_3 - \underbrace{\left(\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 + \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2\right)}_{\text{puedo aplicar la fórmula de proyección}} \in {S_2}^{\perp}$$

Observemos que $w_3 \neq 0_{\mathbb{V}}$, pues $v_3 \notin S_2$.

Así seguimos, hasta el último vector de la nueva base:

$$w_n = v_n - P_{S_{n-1}}(v_n) = v_n - \left(\tfrac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 + \cdots + \tfrac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}w_{n-1}\right)$$

Otra vez podemos afirmar que $w_n \neq 0_{\mathbb{V}}$ pues $v_n \notin S_{n-1} =$ gen$\{w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1}\}$.

Entonces, el conjunto $B' = \{w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n\}$ es un conjunto ortogonal que no contiene al elemento nulo, por lo tanto es l.i. y como dim($\mathbb{V}$)$= n$, B' es un base. Entonces construimos una base ortogonal. ✓

Si quiero conseguir una base ortonormal de $\mathbb{V}$, a cada vector $w_i \in B'$ lo multiplicamos por el coeficiente $\frac{1}{\|w_i\|}$ y de esa manera obtenemos un vector unitario en cada caso.

Resumiendo, para construir la base ortogonal, aplicamos la fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1.v_1.\\
w_2 &= 1.v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1.\\
\vdots &= \vdots \\
w_n &= 1.v_n - \frac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}w_{n-1}
\end{aligned} \qquad \textbf{(G-S)}$$

Si necesitamos una base ortonormal, construimos los vectores unitarios: $u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$. Entonces el conjunto $B'' = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ será una Base ortonormal **(BON)** de $\mathbb{V}$.

Ejemplos

a En $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico, se considera el subespacio

$S =$ gen$\{[1\ \ 1\ \ 1 -1]^T,\ [1 -1\ -1\ \ 1]^T,\ [-1\ \ 1\ \ 1\ 0]^T\}$
Hallar una base ortogonal de S

Resolución:
Los vectores que generan S son l.i. Podemos tomar la base

$B_S = \{\underbrace{[1\ \ 1\ \ 1 -1]^T}_{v_1},\ \underbrace{[1 -1\ -1\ \ 1]^T}_{v_2},\ \underbrace{[-1\ \ 1\ \ 1\ 0]^T}_{v_3}\}$ y aplicamos el método de Gram-Schmidt, para estos vectores:

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle [1 -1\ -1\ \ 1]^T, [1\ \ 1\ \ 1 -1]^T \right\rangle}{\|[1\ \ 1\ \ 1 -1]^T\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\overbrace{\left\langle [-1\ \ 1\ \ 1\ 0]^T, [1\ \ 1\ \ 1 -1]^T \right\rangle}^{1}}{\|[1\ \ 1\ 1\ -1]^T\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\overbrace{\left\langle [-1\ \ 1\ \ 1\ 0]^T, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \right\rangle}^{\frac{(-5)}{2}}}{\|[\frac{3}{2}\ \ \frac{-1}{2}\ \ \frac{-1}{2}\ \ \frac{1}{2}]^T\|^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{(-5)}{6}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Hemos construido una base **ortogonal**:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

Como sólo nos interesan las direcciones, podemos exhibir también la base:

$$\boxed{B'_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}$$

---

b En $C([-1\ \ 1], \mathbb{R})$, con el producto interno definido por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$, se considera el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

Encuentre una base **ortonormal** de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base canónica $E = \{1,\ x,\ x^2\}$.

Resolución:

Empezamos por construir una base ortogonal. Pero antes de aplicar el método de Gram-Schmidt, observemos que, con este P.I. $\langle 1, x\rangle = 0$ y $\langle x, x^2\rangle = 0$, entonces sólo tenemos que solucionar el problema de ortogonalidad del tercer elemento de la base, con respecto al primero:

$w_3 = x^2 - \frac{\langle x^2,1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = x^2 - \frac{(\frac{2}{3})}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$

Tenemos una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$, $B = \left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\right\}$

Para encontrar una base **ortonormal**, calculamos la longitud de cada vector y normalizamos.

$$\|1\| = \sqrt{2}$$
$$\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\|x^2 - \frac{1}{3}\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Obtenemos la base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$: $\boxed{\text{B=}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\ x,\ \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\right\}}$

Una aplicación del proceso de Gram-Schmidt
Descomposición QR de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

En el algoritmo de Gram-Schmidt teníamos:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 1.v_1. \\
w_2 &= 1.v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1. \\
\vdots &= \vdots \\
w_k &= 1.v_k - \frac{\langle v_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2} w_{k-1}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(G-S)}
$$

Si el conjunto $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ es l.i sabemos que con este algoritmo, obtenemos una base ortogonal del subespacio generado por esos vectores.

Si despejamos los vectores v_i en función de los vectores ortonormales w_i. Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1.w_1. \\
v_2 &= \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + 1.w_2 \\
\vdots &= \vdots \\
v_k &= \frac{\langle v_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \cdots + \frac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2} w_{k-1} + 1.w_k
\end{aligned}
$$

Si los vectores $v_1, \ldots, v_k$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ en particular las columnas de una cierta matriz A,entonces los vectores $w_1,\ w_2,\ \ldots, w_k$ formarán una base ortogonal del subespacio col(A).

$A = [v_1|v_2|\ldots|v_k] \in \mathbb{R}^{m\times k}$, donde $v_i \in \mathbb{R}^m$ son las columnas de A.

Para obtener expresiones más compactas, llamamos: $\alpha_{ij} = \langle v_j, w_i\rangle$

Cada columna de A es combinación lineal de los vectores $w_i s$, entonces vamos a poder escribir A como el producto de dos matrices, una de ellas la matriz que tiene como columnas a los vectores de la base ortogonal de col(A), multiplicada a derecha por otra que carga con los coeficientes que participan en las combinaciones lineales citadas.

$$A = [v_1|v_2|\dots|v_k] = \underbrace{[w_1|w_2|\dots|w_k]}_{m\times k}.\underbrace{R_1}_{k\times k}$$

¿Quién es la matriz R_1?
Recordemos que $\text{col}_1(B.C) = B\ \text{col}_1(C)$.

Entonces:

$$\text{col}_1(A) = v_1 = [w_1|w_2|\dots|w_k]\,\text{col}_1(R_1) = w_1 \Rightarrow \text{col}_1(R_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la misma manera:

$$\text{col}_2(A) = v_2 = [w_1|w_2|\dots|w_k]\,\text{col}_2(R_1) = \alpha_{12}w_1 + 1w_2 \Rightarrow \text{col}_2(R_1) = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así seguimos hasta la última columna:

$$\text{col}_k(A) = v_k = [w_1|w_2|\dots|w_k]\,\text{col}_k(R_1) = \frac{\langle v_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 + \cdots + \frac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2}w_{k-1} + 1.w_k \Rightarrow$$
$$\text{col}_k(R_1) = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{(k-1)k} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{encontramos la matriz } R_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \alpha_{1k} \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & \dots\dots & \alpha_{(k-1)k} \\ 0 & & 1 \end{array}\right].$$

Entonces podemos escribir:

$$A = [v_1|v_2|\dots|v_k] = [w_1|w_2|\dots|w_k]\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \alpha_{12} & & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & \alpha_{(k-1)k} \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

Si queremos que la primera matriz, tenga como columnas una $\mathbf{BON}$ de col(A), tendremos que multiplicar cada columna i por el factor $\frac{1}{\|w_i\|^2}$, pero para el resultado del producto matricial no cambie, tendremos que multiplicar la respectiva fila de R_1 por el mismo factor:

$$A = [v_1|v_2|\ldots|v_k] = \underbrace{\left[\frac{w_1}{\|w_1\|}\Big|\frac{w_2}{\|w_2\|}\Big|\ldots\Big|\frac{w_k}{\|w_k\|}\right]}_{Q}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \|w_1\| & \|w_1\|\alpha_{12} & & \|w_1\|\alpha_{1k} \\ 0 & \|w_2\| & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots\ldots & \|w_{k-1}\|\alpha_{(k-1)k} \\ 0 & 0 & & \|w_k\| \end{array}\right]}_{R}$$

Esta última "factorización"de la matriz A se denomina **descomposición QR**

Observese que como la matriz que hemos llamado Q tiene sus columnas ortonormales $Q^TQ = I_k$.

> Definición Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ con rango(A)$= k$, una **descomposición QR** de A es una factorización de la forma:
> $A = QR$ con $Q \in R^{m\times k}$ y $R \in R^{k\times k}$, tales que $Q^TQ = I_k$ y R es una matriz triangular superior con números positivos en la diagonal principal.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Busquemos una descomposición QR de estas matriz. Como $\text{rang}(A) = 2$,

por lo tanto podemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt para conseguir una **BON** de col(A).

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{18}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Normalizamos los vectores hallados para conseguir una **BON** de col(A).

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{18}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ya obtuvimos la matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ que tiene como columnas una BON de col(A).

Como ya hemos probado que $\exists R \in R^{k\times k}$ tal que $A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR = R$
Entonces hallamos $R = Q^T A$:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La descomposición QR de A es :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

Sobre el Teorema de representación de Riesz

Teorema de Riesz: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con P.I, si $\phi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ es cualquier funcional lineal $\phi \neq 0 \Rightarrow \exists$ un único $w \in \mathbb{V}$ tal que $\langle X, w\rangle = \phi(X), \ \forall X \in \mathbb{V}$.

Demostración:

Sea $B = \{v_1, \ \ldots, \ v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Sabemos que toda transformación lineal queda definida sobre una base, en particular si ϕ es una funcional lineal:

$$\phi(X) = \alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n), \ \ \forall X = \alpha_1 v_1 + \ \cdots + \ \alpha_n v_n.$$

Buscamos $w \in \mathbb{V}$, tal que: $\langle X, w\rangle = \phi(X)$.

Reemplacemos las expresiones de X y de ϕ:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \ \cdots + \ \alpha_n v_n, w\rangle = \phi(\alpha_1 v_1 + \ \cdots + \ \alpha_n v_n) \ \ \forall \, \alpha_1, \ldots, \ \alpha_n \in \mathbb{K} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \ \cdots + \ \alpha_n v_n, w\rangle = \alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n), \ \forall \, \alpha_1, \ldots, \ \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Si $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ la ecuación queda:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \ \cdots + \ \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \ldots \beta_n v_n\rangle = \alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n)$$

$$\alpha_1\overline{\beta_1}\,\langle v_1, v_1\rangle + \ \cdots + \ \alpha_n\overline{\beta_n}\,\langle v_n, v_n\rangle = \alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n)$$
$$\alpha_1\overline{\beta_1} + \ \cdots + \ \alpha_n\overline{\beta_n} = \alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n)$$

$$\alpha_1(\overline{\beta_1} - \phi(v_1)) + \ \cdots + \ \alpha_n(\overline{\beta_n} - \phi(v_n)) = 0$$

Entonces si $w = \overline{\phi(v_1)}v_1 + \cdots + \ \overline{\phi(v_n)}v_n$ se cumple $\langle X, w\rangle = \phi(X), \ \forall X \in \mathbb{V}$.

Ejemplo

a En $\mathbb{R}^4$ con el P.I. canónico, sea $\phi(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4$.

Si elegimos $w_0 = [2\ -1\ 1\ 4]^T$, se cumple $\langle X, w\rangle = \phi(X)$.
(Notemos algo Nu$(\phi(X):\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, w_0 = [2\ -1\ 1\ 4]^T \in$ Nu$(\phi)^\perp$.)

Si $\phi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ es cualquier funcional lineal $\phi \neq 0 \Rightarrow$ dim(Nu$(\phi) = n-1$ y dim (Nu$(\phi))^\perp = 1$, entonces Nu$(\phi) =$ gen$\{w_0\}$. Luego $\forall\ X \in \mathbb{V}, X = X_N + X_{Nu^\perp}$

Siempre podemos construir una base, de $\mathbb{V}$ tal que $B = \{\underbrace{v_1, \ldots, v_{n-1},}_{\in \text{Nu}(\phi)}\ w_0\}$

Si $X \in \mathbb{V},\ X = \alpha_1 v_1 + \ \cdots +\ \alpha_{n-1}v_{n-1} + \alpha_n w_0$

$$\phi(X) = \alpha_n \phi(w_0) = \langle X, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1}v_{n-1} + \beta_n w_0\rangle \Leftrightarrow$$

Como $\phi(w_0) = k$

$$\Leftrightarrow \phi(X) = \alpha_n\phi(w_0) = \alpha_n k = \langle X, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1}v_{n-1} + \beta_n\ w_0\rangle$$

Como la igualdad debe cumplirse $\forall X \in \mathbb{V} \Rightarrow w = \overline{k}w_0 \in$ Nu$(\phi))^\perp$.

Entonces sabemos que el w que estamos buscando está en este subespacio, Nu(ϕ), que siempre tiene dimensión 1 cuando $\phi \neq 0$.