CABA, 7 de junio de 2021.

Ejercicios Producto Interno-Curso 1

1. Encuentre en cada caso, una base ortogonal del espacio vectorial que contenga una base de S en cada uno de los siguientes casos:

   a En $\mathbb{R}^3$ con el P.I. canónico, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y + z = 0\}$

   b En P_2 con el P.I. definido por $< p, q >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$
   donde $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$. y $S = \{p \in P_2 : p(1) = p(0)\}$

   c En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el P.I. $< A, B >= tr(B^T A)$ y $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$

   Resolución:

   a Busquemos generadores de S.
   $(x, y, z) \in S \iff 2x - 2y + z = 0 \iff z = -2x + 2y$, Así que:
   $(x, y, z) = (x, y, -2x + 2y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, 2);\ x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

S =gen{ [1 0 -2]^T, $[0\ 1\ 2]^T\}$
Una base de S entonces está dada por $B_S = \{[1\ 0\ \ -2]^T,\ \ [0\ 1\ 2]^T\}$
Si queremos encontrar una base ortogonal de S buscamos $B = \{ u_1, u_2\}$ aplicando el método de G-S:
$u_1 = [1\ 0\ \ -2]^T$
$u_2 = [0\ 1\ 2]^T - \frac{<[0\ 1\ 2]^T,[1\ 0\ -2]^T)>}{\|[1\ 0\ -2]^T\|^2}[1\ 0\ \ -2]^T = [0\ 1\ 2]^T - (\frac{-4}{5})[1\ 0\ \ -2]^T$
$u_2 = [\frac{4}{5}\ \ 1\ \ \frac{2}{5}]^T = \frac{1}{5}[4\ \ 5\ \ 2]^T$
Obtuvimos $B_S = \{[1\ 0\ -2]^T,\ [4\ \ 5\ \ 2]^T\}$ base ortogonal de S. De la ecuación de S obtenemos: $S^\perp =$ gen$\{[2\ \ \ -2\ \ 1]^T\}$.
Podemos afirmar entonces que $B = \{[1\ 0\ \ -2]^T,\ [4\ \ 5\ \ 2]^T,\ [2\ \ \ -2\ \ 1]^T\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ pues es un conjunto de tres vectores no nulos ortogonales en $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto l.i. Luego hemos encontrado una base ortogonal del espacio vectorial.

b Vamos a trabajar de la misma manera en $\mathbb{R}_2[x]$ con el P.I. definido por
$< p, q >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ y $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p(0)\}$.
Busquemos una base de S: $p \in S \iff a_0 + a_1 + a_2 = a_0 \iff a_2 = -a_1$
$p \in S \iff p = a_0 + a_1x - a_1x^2 = a_0 1 + a_1(x - x^2), a_0, a_1 \in \mathbb{R}$
Encontramos una base, $B_S = \{1,\ x - x^2\}$. En este caso $< 1, x - x^2 >= 0 \Rightarrow B_S$ es ortogonal (Alegría...un trabajo menos)
Así que para encontrar una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ basta con encontrar un polinomio no nulo ortogonal a los elementos de B_S. Buscamos $q = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que :
$< 1, b_0 + b_1x + b_2x^2 >= b_0 = 0$
$< x - x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 >= b_1 - b_2 = 0 \iff b_1 = b_2$
Así obtenemos que $q \in S^\perp \iff q = b_1(x + x^2),\ b_1 \in \mathbb{R}$.

Entonces: $B = \{1, x - x^2, x + x^2\}$ es una base ortogonal de P_2 (¿Por qué podemos afirmar que es una base P_2?)

c Por último, buscamos una base ortogonal de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el P.I canónico que contenga una base de $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\}$
S es el subespacio de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ así que $A \in S \iff$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

Entonces:
$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ que resulta ser una base ortogonal con este P.I.
Si buscamos $S^\perp$ tenemos que $A \in S^\perp$ si es ortogonal a cada uno de los vectores de la base de S. Así que obtenemos:

$$A \in S^\perp \iff \begin{cases} < A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} >= a_{11} = 0 \\ < A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >= a_{12} + a_{21} = 0 \\ < A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >= a_{22} = 0 \end{cases}$$

$A \in S^\perp \iff A = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, a_{12} \in \mathbb{R}.$

$B_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $S^\perp$ es el subespacio de las matrices antisimétricas.

Luego $B_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } S}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de } S^\perp} \right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

---

2. En $\mathbb{R}^3$ con el PI canónico, sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 2z = 0\}$

   a Encuentre una base de $S^\perp$.

   b Si $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ encuentre $P_S(v)$.

   c Calcule $\|v\|$ y $\|P_S(v)\|$

Resolución:

a De la ecuación que define a S, es directo que $(1,-2,2) \in S^{\perp}$ pues
$(x,y,z) \in S \iff < (x,y,z),(1,-2,2) >= 1x + -2y + 2z = 1x - 2y + 2z = 0$
Por lo tanto $S^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
$B_{S^{\perp}} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

b Nos piden calcular $P_S(v)$, como $\boxed{P_S(v) = v - P_{S^{\perp}}(v)}$ y $\dim(S^{\perp}) = 1$, resulta más sencillo calcular $P_{S^{\perp}}(v)$.
Aplicamos la fórmula de la proyección ortogonal:

$$P_{S^{\perp}}((3,\ 1,\ -2)) = \frac{< (3,\ 1,\ -2),(1,-2,2) >}{\|(1,-2,2)\|^2}(1,-2,2) = \left(\frac{-3}{9}\right)(1,-2,2) = \left(\frac{-1}{3}\right)(1,-2,2)$$

$$P_S(v) = v - P_{S^{\perp}}(v) = (3,\ 1,\ -2) - \left(\frac{-1}{3}\right)(1,-2,2) = \left(\frac{10}{3},\frac{1}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

c Ahora calculamos $\|v\|$ y $\|P_S(v)\|$
$\|v\| = \sqrt{(3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$
$\|P_S(v)\| = \sqrt{\frac{10^2+1^2+(-4)^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{117}}{3} = \frac{\sqrt{9 \cdot 13}}{3} = \sqrt{13}$
Observemos que $\|P_{S^{\perp}}(v)\| = \|\left(\frac{-1}{3}\right)(1,-2,2)\| = \left(\frac{1}{3}\right)\|(1,-2,2)\| = 1$
Podemos verificar que se cumple el teorema de Pitágoras: $\boxed{\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^{\perp}}(v)\|^2}$

3. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$, con el PI canónico se define el subespacio $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0\}$
Calcule la proyección sobre S para las siguientes matrices:

a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución:
Otra vez, antes de empezar a aplicar cualquier fórmula, busquemos el camino que implique la menor cantidad de cuentas posible.

Estamos usando el P.I. canónico en $\mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow < A, B >= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$.
Como dim($\mathbb{R}^{2\times 2}$)=4 y S está definido por una ecuación $\Rightarrow$ dim(S)=4-1=3 $\Rightarrow$ dim($S^{\perp}$)=1.
Miremos **fijo** la ecuación que define S:
$a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0$
$a_{11} + a_{12} + a_{22} = 1a_{11} + 1a_{12} + 0a_{21} + 1a_{22} = 0$
O sea:

$$A \in S \iff < \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >= 0$$

Entonces obtenemos que $B_{S^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Entonces buscamos primero la proyección sobre $S^{\perp}$ de cada matriz y después calculamos $P_S(A)$ haciendo la diferencia $P_S(A) = A - P_{S^{\perp}}(A)$

a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{S^{\perp}}(A) = \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así que $\boxed{P_S(A) = A - P_{S^{\perp}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

b Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in S$, pues cumple la ecuación que define $S \Rightarrow P_S(B) = B$

c Como $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in S^{\perp} \Rightarrow P_S(C) = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$

---

4. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$- espacio vectorial con P.I y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, tal que:
$\|v_1\| = \sqrt{2},\ \|v_2\| = 1,\ \|v_3\| = \sqrt{3},\quad < v_2, v_1 - v_2 >= 0\ v_3 \in$ (gen$\{v_1, v_2\})^{\perp}$

   a Si S =gen$\{v_1, v_2 - v_3\}$, halle $P_S(v_1 + v_2 + v_3)$

   b Encuentre $v_S \in S$ y $v_{S^{\perp}} \in S^{\perp}$, tal que $v_1 + v_2 + v_3 = v_S + v_{S^{\perp}}$

Resolución:
De los datos del P.I. podemos deducir que: $< v_1, v_1 >= 2,\ < v_2, v_2 >= 1,$
<v$_3, v_3 >= 3, < v_2, v_1 >= 1,\ < v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0.$

a Como S =gen$\{v_1, v_2 - v_3\}$, entonces una base de S es $B_S = \{v_1, v_2 - v_3\}$.
Podemos calcular $S^\perp$ o podemos buscar una base ortogonal de S.
Busquemos una base ortogonal de S y dejamos como tarea para el hogar el otro camino.
Aplicamos el procedimiento de G-S para encontrar $B_S = \{u_1, u_2\}$ base ortogonal de S:
$u_1 = v_1$
$u_2 = (v_2 - v_3) - \frac{<v_2 - v_3, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1$
$u_2 = (v_2 - v_3) - \frac{1}{2} v_1 = -\frac{1}{2} v_1 + v_2 - v_3$
Una base ortogonal entonces puede ser $B_S = \{v_1, -v_1 + 2v_2 - 2v_3\}$
Calculamos entonces $P_S(v_1 + v_2 + v_3)$:
$P_S(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{<v_1+v_2+v_3, v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{<v_1+v_2+v_3, -v_1+2v_2-2v_3>}{\|-v_1+2v_2-2v_3\|^2}(-v_1 + 2v_2 - 2v_3)$
$\boxed{P_S(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{3}{2}(v_1) - \frac{5}{14}(-v_1 + 2v_2 - 2v_3) = \frac{13}{7} v_1 - \frac{5}{7} v_2 + \frac{5}{7} v_3}$

b Sabemos que $P_{S^\perp}(v) = v - P_S(v) \in S^\perp$, así que para escribir a $v_1 + v_2 + v_3$ como suma de un elemento de S y de un elemento de $S^\perp$ basta con escribir:
$v_1 + v_2 + v_3 = P_S(v_1 + v_2 + v_3) + P_{S^\perp}(v_1 + v_2 + v_3)$ (1)
Calculamos $P_{S^\perp}(v_1 + v_2 + v_3)$:
$P_{S^\perp}(v_1 + v_2 + v_3) = (v_1 + v_2 + v_3) - P_S(v_1 + v_2 + v_3)$
$P_{S^\perp}(v_1 + v_2 + v_3) = (v_1 + v_2 + v_3) - (\frac{13}{7} v_1 - \frac{5}{7} v_2 + \frac{5}{7} v_3)$
$P_{S^\perp}(v_1 + v_2 + v_3) = -\frac{6}{7} v_1 + \frac{12}{7} v_2 + \frac{2}{7} v_3$
Reemplazamos en (1):
$$v_1 + v_2 + v_3 = \underbrace{(\frac{13}{7} v_1 - \frac{5}{7} v_2 + \frac{5}{7} v_3)}_{v_S \in S} + \underbrace{(-\frac{6}{7} v_1 + \frac{12}{7} v_2 + \frac{2}{7} v_3)}_{v_{S^\perp} \in S^\perp}$$

---

5. Sean $\mathbb{V}$ esp. vectorial con P.I. dim$(\mathbb{V}) = 3$, $B = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ base de $\mathbb{V}$ y $G_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   a) Construya una base ortogonal de $\mathbb{V}$.
   b) Dado $S =$ gen$\{v_1 + v_2,\ 2v_2 - v_3\}$, hallar una base de $S^\perp$.
   c) Si $u = 2v_1 - v_2$, calcule dist(u, S).
   d) Encuentre todos los $v \in \mathbb{V}$, tales que dist$(v, S) = 1$

Resolución:

a) Aplicando el método de G-S, tomo $B = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ definimos:
$u_1 = v_1$
$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{||v_1||^2} v_1$

$$\langle v_2, v_1\rangle = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 1.$$

$$||v_1||^2 = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 2$$

$u_2 = v_2 - \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(-v_1 + 2v_2)$, tomo $u_2' = -v_1 + 2v_2$

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{||v_1||^2}v_1 - \frac{\langle v_3, -v_1+2v_2\rangle}{||-v_1+2v_2||^2}(-v_1 + 2v_2)$

$$\langle v_3, v_1\rangle = [0\ 0\ 1]G_B\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$\langle v_3, -v_1 + 2v_2\rangle = [0\ 0\ 1]G_B\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = [0\ 1\ 4]\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = 2$$

$$|| - v_1 + 2v_2||^2 = [-1\ 2\ 0]G_B\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = [-1\ 2\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = 2$$

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{||v_1||^2}v_1 - \frac{\langle v_3, -v_1+2v_2\rangle}{||-v_1+2v_2||^2}(-v_1 + 2v_2) = v_3 - 0\cdot v_1 - \frac{2}{2}(-v_1 + 2v_2) = v_3 + 2v_1 - 2v_2$

La nueva base ortogonal obtenida es $B' = \{v_1,\ -v_1 + 2v_2,\ 2v_1 - 2v_2 + v_3\}$

b) Sea $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, $u \in S^\perp \Leftrightarrow \langle u, v_1 + v_2\rangle = 0,\ \langle u, 2v_2 - v_3\rangle = 0$

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3, v_1 + v_2\rangle = [\alpha\ \beta\ \gamma]G_B\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = [\alpha\ \beta\ \gamma]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0$$

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3, 2v_2 - v_3\rangle = [\alpha\ \beta\ \gamma]G_B\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} = [\alpha\ \beta\ \gamma]\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix} = 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0$$

$u = \beta(\frac{5}{4}v_1 + v_2 + \frac{7}{4}v_3),\quad \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow S^\perp =$ gen$\{\frac{5}{4}v_1 + v_2 + \frac{7}{4}v_3\}$

c) Si $u = 2v_1 - v_2$, calcule dist(u, S).

$dist(u, S) = ||P_{S^\perp}(u)|| = ||\frac{\langle 2v_1 - v_2, w\rangle}{||w||^2}w||,$ con $w = \frac{5}{4}v_1 + v_2 + \frac{7}{4}v_3$, también puedo tomar como generador $w_0 = 5v_1 + 4v_2 + 7v_3$.

Calculemos esta distancia, usando w_0:

$$\langle u, w_0\rangle = [w_0]^{B^T}G_B[u]^B = [5\ 4\ 7]G_B\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = [5\ 4\ 7]\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\langle u, w_0\rangle = [14\ \ 16\ \ 32]\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = 12.$$

$||w_0||^2 = \langle w_0, w_0\rangle = [w_0]^{B^T}\ G_B[w_0]^B = [5\ 4\ 7]\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 358$

dist$(u, S) = ||P_{S^\perp}(u)|| = ||\frac{\langle 2v_1 - v_2, w_0\rangle}{||w_0||^2} w_0|| = ||\frac{12}{358}(5v_1 + 4v_2 + 7v_3)|| = \frac{12}{358}||5v_1 + 4v_2 + 7v_3||$

dist$(u, S) = \frac{6}{179}\sqrt{358}$

d) Si Busco $v/$ dist$(v, S) = 1 \Rightarrow ||P_{S^\perp}(v)|| = 1$.
Sabemos que $\forall\ v \in \mathbb{V},\ v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$.
Entonces:
$v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v) = v_S + v_{S^\perp} = \underbrace{\alpha(v_1 + v_2) + \beta(2v_2 - v_3)}_{\in S} + \underbrace{\lambda(5v_1 + 4v_2 + 7v_3)}_{\in S^\perp}$.

Si dist$(v, S) = 1 \Rightarrow ||P_{S^\perp}(v)|| = 1 \Rightarrow |\lambda|\ \ ||5v_1 + 4v_2 + 7v_3|| = 1 \Rightarrow |\lambda|\sqrt{358} = 1$.
Obtenemos :
$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{358}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{358}}$.
Entonces $v \in \mathbb{V}$ cumple dist$(v, S) = 1$ si:
$v = \alpha(v_1 + v_2) + \beta(2v_2 - v_3) + \frac{1}{\sqrt{358}}(5v_1 + 4v_2 + 7v_3)$, con α y $\beta \in \mathbb{R}$.
o
$v = \alpha(v_1 + v_2) + \beta(2v_2 - v_3) - \frac{1}{\sqrt{358}}(5v_1 + 4v_2 + 7v_3)$, con α y $\beta \in \mathbb{R}$.