"Yo solo tengo esta pobre antena
Que me transmite lo que decís.
Esta canción, mi ilusión, mis penas
Y este souvenir"
Charly García

Transformación Lineal-Segunda Reunión.Curso 1.

Recordemos que en la clase pasada vimos:

Clasificación de transformaciones lineales

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una función, con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Se dice que T es **monomorfismo** si es una transformación lineal inyetiva.

Se dice que T es **epimorfismo** si es una transformación lineal suryectiva.

Se dice que T es **isomorfismo** si es una transformación lineal biyectiva.

Recordatorio 1: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es inyectiva si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$.
Esto es equivalente a decir F es inyectiva si $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Recordatorio 2: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es suryectiva si Im(F)= Cod$(F) = \mathbb{W}$

Recordatorio 3: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

De la teoría de funciones, sabemos que si $T : \mathbb{V} \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces $\exists\, T^{-1} : \mathbb{W} \longrightarrow V$, su función inversa. O sea la función que cumple:

$(T \circ T^{-1})(w) = T(T^{-1}(w)) = w,\ \forall\, w \in \mathbb{W}$ y $(T^{-1} \circ T)(v) = T^{-1}(T(v)) = v,\ \forall\, v \in \mathbb{V}$.

Se puede escribir también que T^{-1} es la función que cumple:

$T \circ T^{-1} = Id_{\mathbb{W}}$ y $T^{-1} \circ T = Id_{\mathbb{V}}$.

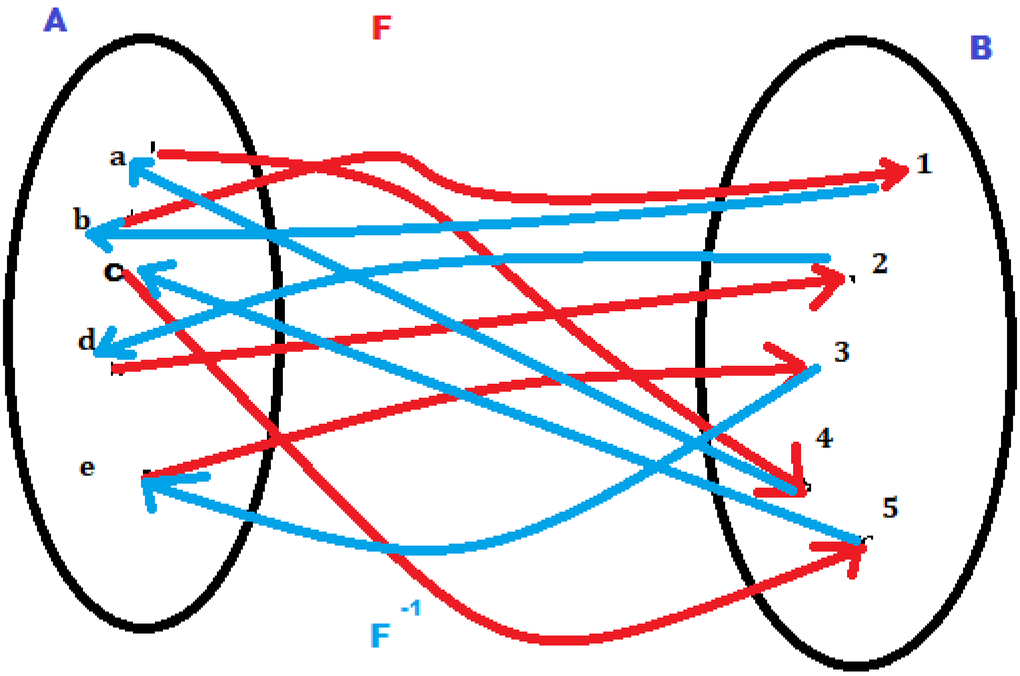

Figura 1: Función biyectiva. Si $F(a) = 4 \Rightarrow F^{-1}(4) = a$.

Encontrar T^{-1} es muy sencillo cuando trabajamos con transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita.

Si $T : \mathbb{V} \longrightarrow W$ es un isomorfismo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V} \Rightarrow \dim(\mathbb{W}) = n$ y además $B' = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathbb{W}$ pues gen$\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ =Im(T)= $\mathbb{W} \Rightarrow \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathbb{W}$ porque son n vectores que generan $\mathbb{W}$.

Entonces, si T es isomorfismo, aplicando T a cualquier base de $\mathbb{V}$, obtenemos:

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \quad \vdots = \vdots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

Como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de $\mathbb{W}$, sobre esta base queda definida $T^{-1} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} T^{-1}(w_1) = v_1 \\ T^{-1}(w_2) = v_2 \\ \quad \vdots = \vdots \\ T^{-1}(w_n) = v_n \end{cases}$$

Ejemplo:

Dada $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(p) = \begin{bmatrix} p(1) - p(0) \\ p'(0) + p''(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$.

a. Verifique que T es un isomorfismo.

b. Halle $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$.

Resolución:

a. Trabajando un poco con el polinomio genérico, $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$, obtenemos la fórmula:

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

Im(T)= $\text{gen}\{T(x^2), T(x), T(1)\} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Los generadores de Im(T), son obviamentye linealmente independientes y, por lo tanto, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

T es es un epimorfismo y como consecuencia del teorema de la dimensión para transformaciones lineales, dim(Nu(T))= 0, así que T es también monomorfismo y, por lo tanto, es un isomorfismo.

b. Ahora buscamos T^{-1}:

$$\begin{cases} T(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ T(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ T(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 \\ \\ T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x \\ \\ T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \end{cases}$$

T^{-1} queda univocamente definida sobre una base de $\mathbb{R}^3$.

Si queremos encontrar su fórmula deberemos buscar la descomposición de cualquier $x \in \mathbb{R}^3$

con respecto a la base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x_2 - x_1 \\ \beta = 2x_1 - x_2 \\ \gamma = x_3 \end{cases}$$

Entonces:

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = T^{-1}\left((x_2 - x_1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = (x_2 - x_1)\, T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + (2x_1 - x_2)\, T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3\, T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = (x_2 - x_1)\, x^2 + (2x_1 - x_2)\, x + x_3\, 1$$

Sobre la ventaja de trabajar con transformaciones lineales....

Discutamos que resultados podemos obtener si nos encontramos frente a una ecuación que involucra una transformación lineal $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$. Específicamente, una ecuación del tipo:

$$T(v) = w_0$$

Si la ecuación tiene solución será porque $w_0 \in \mathrm{Im}(T)$ y si $w_0 \notin \mathrm{Im}(T)$ la ecuación no tendrá solución.

Y si $w_0 \in \mathrm{Im}(T)$ ¿de qué dependerá que tenga una única solución o o más de una?

Veamos, si existen $x_1 \neq x_2$ tal que $T(x_1) = T(x_2) = w_0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0_{\mathbb{W}}$
Entonces $x_1 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\in \mathrm{NU}(T)} + x_1 \Rightarrow x = k(x_2 - x_1) + x_1$ es solución de la ecuación $\forall\, k \in \mathbb{K}$,o sea que si hay más de una solución de la ecuación, hay infinitas.
Por lo tanto, hay más de una ecuación si y sólo sí $\mathrm{Nu}(T) \neq \{0_{\mathbb{V}}\} \Leftrightarrow$ T no es monomorfismo.

Entonces, con la ecuación que involucra a una transformación lineal pasa lo mismo que pasaba cuando resolvíamos un sistema lineal.

$$\text{T(v)=w}_0 \begin{cases} \text{si } w_0 \notin \mathrm{Im}(T) & \text{el sistema es incompatible.} \\ \text{si } w_0 \in \mathrm{Im}(T) \text{ y } T \text{ es monomorfismo} & \text{la ecuación tienen solución única.} \\ \text{si } w_0 \in \mathrm{Im}(T) \text{ y } T \text{ no es monomorfismo} & \text{la ecuación tienen infinitas soluciones.} \\ \text{Todas las soluciones son de la forma} & x_p + x_N;\ x_N \in \mathrm{Nu}(T) \text{ y } x_p \text{ sol. particular.} \end{cases}$$

Matriz de una transformación lineal.

Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son espacios vectoriales de dimensión finita, podemos conseguir una expresión matricial para cualquier t.l de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.

Supongamos B y B' bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ transformación lineal.

Entonces:

$$\text{Si } x \in \mathbb{V}, x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \Rightarrow T(x) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \in \mathbb{W}$$

$$[T(x)]^{B'} = [T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)]^{B'}$$

$$[T(x)]^{B'} = [\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)]^{B'} \in \mathbb{K}^m$$

$$[T(x)]^{B'} = \underbrace{\alpha_1 [T(v_1)]^{B'} + \cdots + \alpha_n [T(v_n)]^{B'}}_{\text{comb. lineal en } \mathbb{K}^m}.$$

$$[T(x)]^{B'} = \underbrace{\left[[T(v_1)]^{B'} \mid \ldots \mid [T(v_n)]^{B'} \right]}_{\in \mathbb{K}^{m \times n}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$[T(x)]^{B'} = \underbrace{\left[[T(v_1)]^{B'} \mid \ldots \mid [T(v_n)]^{B'} \right]}_{\in \mathbb{K}^{m \times n}} [x]^B$$

<u>Definición:</u> Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de $\mathbb{W}$ y $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ t.l, la matriz $\left[[T(v_1)]^{B'} \mid \ldots \mid [T(v_n)]^{B'} \right] \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se llama la matriz de T con respecto a las bases B y B' y se nota: $[T]_B^{B'}$, es la única matriz que cumple:

$$[T(x)]^{B'} = [T]_B^{B'} [x]^B$$

<u>Observaciones:</u>

En lo que sigue $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ t.l. y B y B' bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente.

a. Las columnas de $[T]_B^{B'}$ son las coordenadas de los generadores de la $\mathrm{Im}(T)$, por lo tanto $\mathrm{rg}([T]_B^{B'}) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

b. $x \in \mathrm{Nu(T)} \Leftrightarrow [T]_B^{B'} [x]_B = 0_{\mathbb{K}^m}$

c. $\mathrm{Nul}([T]_B^{B'})$ es el subespacio de las **coordenadas de los vectores de $\mathbb{V}$ que están en el $\mathbf{Nu}(T)$.**

d. $w \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{V}$ tal que $T(x) = w \Leftrightarrow [T(x)]^{B'} = [w]^{B'} \Leftrightarrow [T]_B^{B'}[x]^B = [w]^{B'}$.

e. Si $G : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$ es t.l. y B'' es base de U, entonces se cumple: $[G \circ T]_B^{B''} = [G]_{B'}^{B''}[T]_B^{B'}$.

f. Si T es un isomorfismo, $[T]_B^{B'} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y es inversible.

g. Se cumple $[T^{-1}]_{B'}^{B} = \left([T]_B^{B'}\right)^{-1}$

Ejemplos:

1. Data $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(p) = \begin{bmatrix} p(1)-p(0) \\ p'(0)+p''(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$. Hallar la matriz de T con respecto a las bases $E_{\mathbb{R}_2[x]} = \{x^2,\ x,\ 1\}$ y $E'_{\mathbb{R}^3} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$.

Resolución:

Ya sabemos que podemos expresar esta t.l. en función de los coeficientes de cualquier polinomio genérico $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$:

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_2+a_1 \\ a_1+2a_2 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{[p]^{E'}}$$

Entonces:

$$[T(a_2x^2 + a_1x + a_0)]^{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [p]^{E}$$

$$[T]_E^{E'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ t.l. tal que $[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, siendo $B = \{x^2 - x, x+1, 1\}$ y

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Hallar $T(x^2 + x + 2)$.

b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

c) Hallar, si existen, todos los $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resolución:

a) Si queremos hallar $T(x^2+x+2)$, tenemos que recordar que, por definición, $[T(x)]^{B'} = [T]_B^{B'}[x]^B$, entonces :

$$[T(x^2+x+2)]^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} [x^2+x+2]^B.$$

Debemos hallar $[x^2+x+2]^B$:

$x^2+x+2 = \alpha(x^2-x) + \beta(x+1) + \gamma 1 \Rightarrow \ \alpha = 1, \ \beta = 2, \ \gamma = 0.$

$$[T(x^2+x+2)]^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

$$T(x^2+x+2) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$T(x^2+x+2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix} \checkmark$$

b) Ahora buscamos $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

$$p \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow T(p) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow [T]_B^{B'}[p]_B = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema homogéneo:

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{matrix} \right| \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2+F_1} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \end{matrix} \right| \xrightarrow[F_4+3F_2]{F_3-F_2} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow \gamma = -2\beta \text{ y } \alpha = -\beta.$$

$$p \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow [p]^B = \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \\ -2\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \beta\{(-1)(x^2-x) + (1)(x+1) + (-2)1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \beta(-x^2 + 2x - 1)$$

$$B_N = \{-x^2 + 2x - 1\}$$

Para buscar una base de $\mathrm{Im}(T)$, trabajamos con las columnas de $[T]_B^{B'}$, **recordando que estas columnas son las coordenadas de los generadores de Im(T) con respecto a la bace B'.**

$$\mathrm{Col}([T]_B^{B'})=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

Ahora "traducimos" estas coordenadas:

$$[w_1]^{B'} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow w_1 = (1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$[w_2]^{B'} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-3\end{bmatrix} \Leftrightarrow w_2 = (1)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\-4\end{bmatrix}\right\} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$$

$$B_{\mathrm{Im}} = \left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$$

c) Para resolver la ecuación $T(p) = \begin{bmatrix}1\\5\\4\\2\end{bmatrix}$, utilizamos también la representación matricial de T:

$$T(p) = \begin{bmatrix}1\\5\\4\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow [T]_B^{B'}[p]^B = \left[\begin{bmatrix}1\\5\\4\\2\end{bmatrix}\right]^{B'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right| \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2+F_1} \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right| \xrightarrow[F_4+3F_2]{F_3-F_2} \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Luego todas las soluciones cumplen:

$$[p]^B = \begin{bmatrix} 3-\beta \\ \beta \\ 1-2\beta \end{bmatrix}$$

Recordando que $B = \{x^2 - x, x+1, 1\}$, obtenemos que p cumple $T(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, si:

$$p = (3-\beta)(x^2 - x) + \beta(x+1) + (1-2\beta)1 = \underbrace{3x^2 - 3x + 1}_{\text{sol. particular}} + \beta \underbrace{(-x^2 + 2x - 1)}_{\in \mathrm{Nu}(T)}, \beta \in \mathbb{R}.$$