"La vida no se trata de
encontrarte a ti mismo.
La vida se trata de crearte a tí mismo"
George Bernard Shaw

Transformación Lineal

Definición: Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos K espacios vectoriales, se dice que una función

$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, si cumple:

- $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \ \ \forall\, u_1, u_2 \ \in \mathbb{V}.$
- $T(\lambda u) = \lambda T(u), \ \ \forall\, u \in \mathbb{V}$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Nota:
Esto es equivalente a decir que, para toda combinación lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in \mathbb{V}$, *se cumple* $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k)$.

Ejemplos:

- $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

- $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = (x_1 - x_3)x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_2 + x_3)$

- $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(P) = \begin{bmatrix} P(0) + P'(0) \\ P(1) - P(0) \\ P(0) - 1/2P''(0) \end{bmatrix}.$

  Si $P = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Rightarrow P' = 2a_2x + a_1, P'' = 2a_2,\ P(1) = a_2 + a_1 + a_0, P(0) = a_0$

  Si remplazamos en la fórmula obtenemos, $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ (a_2 + a_1 + a_0) - a_0 \\ a_0 - \frac{1}{2}(2a_2) \end{bmatrix}$

  $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ a_2 + a_1 \\ a_0 - a_2 \end{bmatrix}$

  Entonces:
  $T(P + Q) = T(a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_2x^2 + b_1x + b_0) =$

$$T(P+Q) = T((a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)) = \begin{bmatrix} (a_0+b_0)+(a_1+b_1) \\ (a_2+b_2)+(a_1+b_1) \\ (a_0+b_0)-(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

$$T(P+Q) = \begin{bmatrix} a_0+a_1 \\ a_2+a_1 \\ a_0-a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0+b_1 \\ b_2+b_1 \\ b_0-b_2 \end{bmatrix} = T(P)+T(Q).(1) \checkmark$$

$$T(\lambda(a_2x^2+a_1x+a_0)) = T(\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0) = \begin{bmatrix} \lambda a_0+\lambda a_1 \\ \lambda a_2+\lambda a_1 \\ \lambda a_0-\lambda a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_0+a_1 \\ a_2+a_1 \\ a_0-a_2 \end{bmatrix} = \lambda T(P)$$

Luego: $T(\lambda P) = (P)$ (2) $\checkmark$
Por (1)y (2) , T es transformación lineal.

- Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, entonces la función "tomar coordenadas" $[\ ]^B : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es una t.l.

Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos K espacios vectoriales y $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ es una transformación lineal:

- **Recordatorio 1:** Se dice que $\mathbb{V}$ es el dominio de T y $\mathbb{W}$ el codominio de T.
- **Recordatorio 2:** La Imagen de T es el conjunto:
  $\mathrm{Im}(T)=\{w\in\mathbb{W}\text{tal que}, v\in\mathbb{V}, T(v)=w\}$
- **Definición 1:** Si $S\subset\mathbb{V}, S\neq\emptyset$, se llama Imagen de S por T, al conjunto:
  $T(S)=\{w\in\mathbb{W}:\exists x\in S, w=T(x)\}\subseteq\mathbb{W}$.
- **Definición 2:** Si $U\subset\mathbb{W}, U\neq\emptyset$, se llama Preimagen de U por T, al conjunto:
  $T^{-1}(U)=\{x\in\mathbb{V}:T(x)\in U\}\subseteq\mathbb{V}$.
- **Definición 3:** Se llama **Núcleo** de F al conjunto:
  $\mathrm{Nu}(T)=\{x\in\mathbb{V}:T(x)=0_{\mathbb{W}}\}=T^{-1}(\{0_{\mathbb{W}}\})\subseteq\mathbb{V}$.

Observaciones:

Para todo lo que sigue $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}\Rightarrow$ es t.l.

a. $T:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}\Rightarrow T(0_{\mathbb{V}})=0_{\mathbb{W}}$.

b. Si $\mathbb{V}=\mathrm{gen}\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m\}\Rightarrow\mathrm{Im}(T)=\mathrm{gen}\{T(v_1),\ldots,T(v_m)\}$
Pues si $w\in\mathrm{Im}(T)\Leftrightarrow\ \ x\in\mathbb{V}$ tal que $T(x)=w$, pero si $\mathbb{V}=\mathrm{gen}\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}\Rightarrow$ existen escalares tal que :

$$x=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m\Rightarrow w=T(x)=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m)\underbrace{=}_{t.l.}\alpha_1T(v_1)+\cdots+\alpha_mT(v_m).$$

$w\in\mathrm{Im}(T)\Leftrightarrow w\in\mathrm{gen}\{T(v_1),\ T(v_2),\ \ldots,\ T(v_m)\}$.

$\boxed{\text{Im(T)=gen}\{\text{ T(v}_1),\ldots,T(v_m)\}}$

c. Si S es subespacio de $\mathbb{V}\Rightarrow T(S)$ es subespacio de $\mathbb{W}$.

d. Si U es subespacio de $\mathbb{W}\Rightarrow T^{-1}(U)$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

e. **Toda t.l. queda univocamente determinada sobre una base.**
Más precisamente:
Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ espacios vectoriales, $B=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $\{w_1,\ w_2,\ \ldots w_n\}\subset\mathbb{W}$, existe una única transformación lineal $F:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{W}$ tal que: $F(v_1)=w_1,\ F(v_2)=w_2,\ldots,F(v_n)=w_n$.

Demostración

Primero vamos a demostrar que existe una transformación lineal que cumple las n condiciones.

Para cada $x \in \mathbb{V}$, como B es base, existen únicos escalares $\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n$ tal que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

Definimos $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ con la siguiente fórmula:

Si $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \ F(x) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_1 w_n$.

a) Se cumple que F es una t.l. pues si $x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow$ existen escalares tales que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, luego:

$x + y = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$

$x + y = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n$

Aplicando la definición de F, obtenemos:

$F(x + y) = F((\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n)$

$F(x + y) = (\alpha_1 + \beta_1) w_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) w_n$

$F(x + y) = \underbrace{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n}_{F(x)} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n}_{F(y)}$

Por lo tanto, se cumple: $F(x + y) = F(x) + F(y)$✓

De la misma manera se prueba que $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

b) Probamos entonces que definimos una transformación lineal, es fácil ver que cumple que $F(v_i) = w_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, \ n$.

c) Ahora tenemos que probar que es única.

supongamos que existe otra **t.l.** $G : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ que cumple:

$$G(v_1) = w_1, \ G(v_2) = w_2, \ \ldots, G(v_n) = w_n$$
$$\text{Si } x \in \mathbb{V}, \text{ y } x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n. \text{ Entonces, como G es t.l. :}$$
$$G(x) = G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n)$$

Reemplazando:

$$G(x) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = F(x) \, \forall x \in \mathbb{V}.$$

Luego $G = F$.

Ejemplos:

1. ¿Existe $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.l. tal que $F([1\ -1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $F([0\ 1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

   La respuesta es sí, pues $\{[1\ -1]^T,\ [0\ 1]^T\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

   Si $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_2 + x_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Y esta descomposición es única.
   Entonces:

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = F\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_1 + x_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \underbrace{=}_{t.l} x_1 F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + (x_2 + x_1) F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 + x_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}. \checkmark$$

2. ¿Existe $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.l. tal que $F([1\ -1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $F([0\ 1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

   $F([1\ 0]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

   Pero $[1\ 0]^T = [1\ -1]^T + [0\ 1]^T$

   Si F es t.l:

$$F([1\ -1]^T + [0\ 1]^T) = F([1\ -1]^T) + F([0\ 1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto no existe una t.l. que cumpla las tres condiciones.

3. ¿Existe una $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.l. tal que $F([1\ -1]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

   Sí. Hay infinitas!! ¿Por qué? Porque puedo extender $\{[1\ -1]^T\}$ de infinitas maneras a una base de $\mathbb{R}^2$ y definir cuánto vale F en el otro vector de infionitas maneras también.

Otro Ejemplo:

Tomemos una de las transformaciones lineales mostradas al inicio, por ejemplo:
$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = (x_1 - x_3)x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_2 + x_3)$
Busquemos $\text{Im}(T)$ y $\text{Nu}(T)$:

Tomemos una base del dominio $\{[1\ 0\ 0]^T,\ [0\ 1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 1]^T\}$

$\text{Im}(T) = \text{gen}\{T([1\ 0\ 0]^T),\ T([0\ 1\ 0]^T),\ T([0\ 0\ 1]^T)\} = \text{gen}\{x^2 + x,\ x + 1,\ \underbrace{-x^2 + 1}_{\text{comb.lineal}}\}.$

$\dim(\text{Im}(T)) = 2$
$\text{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3, T(x) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$
Entonces $x \in \text{Nu}(T) \Leftrightarrow T(x) = 0\,x^2 + 0\,x + 0\,1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_3)x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_2 + x_3) = 0\,x^2 + 0\,x + 0\,1.$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

Matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $x \in \text{Nu}(T) \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\dim(\text{Nu}(T)) = 1$

$\dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Dom}(T))$

Teorema: (Dimensión de subespacios fundamentales de una transformnación lineal) Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

$$\boxed{\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{V})}$$

Demostración:

Como $\mathbb{V}$ es de dimensión finita, supongamos $\dim(\mathbb{V}) = n \Rightarrow \exists\ B = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n\}$ base de $\mathbb{V}$.

Si $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 0 \Rightarrow$ sabemos que $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{gen}\{T(v_1),\ T(v_2),\ \ldots,\ T(v_n)\}$ y este conjunto es l.i, pues si igualamos a $0_{\mathbb{W}}$ una combinación lineal, obtenemos:

$$\lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = 0_{\mathbb{W}} \ (1)$$

Como T es t.l:

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathrm{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Y como $\{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n\}$ es l.i. $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$ y como estos escalares vienen de (1), concluimos que $\{T(v_1),\ T(v_2),\ \ldots,\ T(v_n)\}$ es un conjunto l.i y por lo tanto $\dim(\mathrm{Im}(T)) = n$ y se cumple que $\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{V})$.

Si $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = n$, también se cumple.

Si $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = k < n \Rightarrow \exists\ B_N = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ nase de $\mathrm{Nu}(T)$ y esta base puede extenderse a una base de $\mathbb{V}$, por ejemploo $B' = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}, \ldots, u_n\ \}$.
Por lo visto, sabemos que $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{gen}\{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$, veamos ahora que estos $n-k$ vectores son l.i:

$$\lambda_1 T(u_{k+1}) + \cdots + \lambda_{n-k} T(u_n) = 0_{\mathbb{W}} \ (2)$$

$$T(\lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow \lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n \in \mathrm{Nu}(T)$$

Entonces existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k$$

$$-\beta_1 u_1 - \cdots - \beta_k u_k \lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Y como los vectores son l.i. porque foman una base de $\mathbb{V} \Rightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_k = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$.

Como los escalares $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{n-k}$ viene de la igualdad (2) $\Rightarrow \{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ es l.i $\Rightarrow$ dim(Im(T))= $n-k$, o sea otra vez se cumple la igualdad pues dim(Nu(T))+ dim(Im(T))= $k + (n-k) = n$.✓

Luego para toda t.t. en $\mathbb{V}$, espacio vectorial de dimensión finita se cumple:

$$\boxed{\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{V})}$$

Clasificación de transformaciones lineales

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una función, con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Se dice que T es **monomorfismo** si es una transformación lineal inyetiva.

Se dice que T es **epimorfismo** si es una transformación lineal suryectiva.

Se dice que T es **isomorfismo** si es una transformación lineal biyectiva.

Recordatorio 1: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es inyectiva si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$.
Esto es equivalente a decir F es inyectiva si $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Recordatorio 2: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es suryectiva si Im(F)= Cod$(F) = \mathbb{W}$

Recordatorio 3: $F : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Figura 1: Función inyectiva $\boxed{\text{card}(X) \leq \text{card(Y)}}$

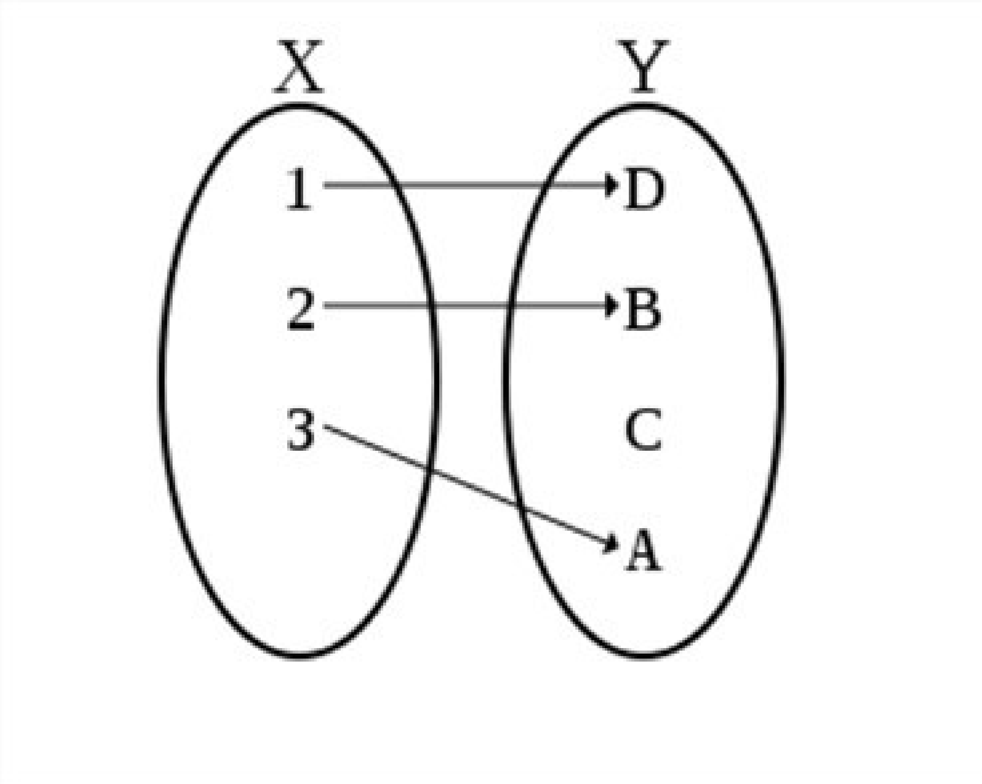
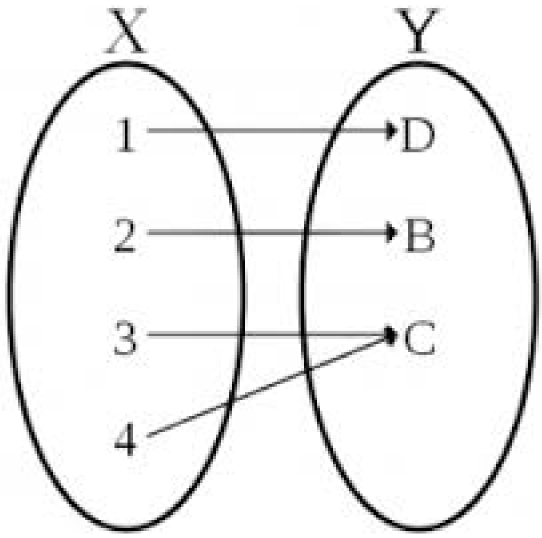


Figura 2: Función suryectiva $\boxed{\text{card}(X) \geq \text{card(Y)}}$



Observaciones:

En todo lo que sigue $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal.

a. T es monomorfismo $\Leftrightarrow \text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.
$\Leftarrow$) Si $\text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$, veamos que T es inyectiva:

Supongamos que $\underline{T(x_1) = T(x_2)} \Rightarrow T(x_1)-T(x_2) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(x_1-x_2) = 0_{\mathbb{W}}$ porque T es t.l. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \underline{x_1 = x_2}$, por lo tanto T es inyectiva. ✓

$\Rightarrow$) Ahora supopngamos que T es monomorfismo y sea $v \in \text{Nu}(T) \Rightarrow T(v) = 0_{\mathbb{W}}$ y como T es t.l. sabemos que $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(v) = 0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}})$ y como T es inyectiva si $T(v)T(0_{\mathbb{V}}) \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$. Demostramos que si $v \in \text{Nu}(T) \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$. Por lo tanto $\text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.✓

$$\boxed{T \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow \text{Nu}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}.}$$

b. T es epimorfismo $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = \mathbb{W} \Leftrightarrow \dim(\text{Im}T)) = \dim(\mathbb{W})$.Es inmediato.

c. Si $\dim(\mathbb{V})= n$ y $\dim(\mathbb{W})= m$:

1) Si T es monomorfismo $\Rightarrow \dim(\mathbb{V}) \leq \dim(\mathbb{W})$.

   Por el teorema de la dimensión para t.l:

   dim(Nu(T)) + dim(Im(T))=dim(V) (a).

   Como T es monomorfismo $\Rightarrow \dim(\text{Nu}(T)) = 0$.
   Además como $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{W} \Rightarrow \dim(\text{Im}T)) \leq \dim(\mathbb{W})$, reemplazando en (a):
   $\dim(\text{V})= \dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(\mathbb{W})$.✓

2) Si T es epimorfismo $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(\mathbb{V})$.
   Pues por el mismo teorema:

   dim(Nu(T)) + dim(Im(T))=dim(V) (a).

   Si T es epimorfismo $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{W})$, reemplazando en (a):

   $\underbrace{\dim(\text{Nu(T)})}_{\geq 0} + \dim(\mathbb{W}) = \dim(\text{V}) \Rightarrow \dim(\text{V}) \geq \dim(\mathbb{W})$.✓

3) Si T es isomorfismo $\Rightarrow \dim(W) = \dim(\mathbb{V})$. (Es inmediato, con lo ya visto.)