Y si vas a la derecha
Y cambiás hacia la izquierda, adelante.
Es mejor que estarse quieto
Es mejor que ser un vigilante"
Charly García

Comentarios y ejercicios sobre resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.
Curso 1

Vamos a estudiar las ecuaciones diferenciales lineales aplicando lo visto en la teoría de transformaciones lineales.
Vamos a resolver una ecuación del tipo:

$$L(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots n-1.$$

También se puede notar:

$$L(y) = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I)(y)$$

La incognita y que buscamos es una función derivable, por lo menos hasta el orden n y, para poder asegurar solución, consideramos que f es una función continua.

Como $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, entonces el método que vamos a aplicar para resolver estas ecuaciones es el que tiene en cuenta la característica de las soluciones de una ecuación que involucra a una transformación lineal.

Si L es una t.l. y queremos resolver $L(v) = w$ con $w \in$ Im(T) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ todas las soluciones de la ecuación podrán escribirse como:
$v = v_p + v_N$

v_p solución particular

v_N elemento del $Nu(L)$, o sea solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

Por lo visto en la explicación teórica, si la ecuación es de orden n, el $Nu(L)$ tiene dimensión n.
Además si f es una función continua $\Rightarrow f \in$ Im(L) y podemos asegurar que la ecuación tendrá infinitas soluciones.

Vamos a resolver las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas que se presenten de la siguiente manera:

- Primero buscamos todas las soluciones del sistema homogéneo, o sea calculamos el $Nu(L)$.
- Después buscamos una solución particular de la ecuación. en este curso sólo resolveremos ecuacionescuyas soluciones particulares pueden encontrarse a través del método de coeficientes indeterminados.

La búsqueda del $Nu(L)$ se reduce a buscar las raíces del polinomio asociado a la ecuación diferencial y plantear las funciones exponenciales que corresponden.

Se prueba que $dim(Nu(L)) = n$ para cada ecuacuón diferencial de orden n.

Para cada ecuación ecuación diferencial lineal homogénea, de la forma:

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I)(y) = 0$$

Se considera el **polinomio característico** asociado a la ecuación:

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

Es fácil verificar que si λ_1 es raíz de $p(r) \Rightarrow e^{\lambda_1 x}$ es solución del sistema homogéneo.
Además si $\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_n$, son raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial, entonces el operador diferencial $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I$ puede "factorizarse":

$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0I)(y)=0 \Longleftrightarrow (D-\lambda_1 I)\circ(D-\lambda_2 I)\cdots\circ(D-\lambda_n I)(y)=0$$

Si el polinonio característico tiene n raíces reales distintas $\Rightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ será una base del subespacio de soluciones del sistema homogéneo.

Si el polinomio característico tiene alguna raíz real β de multiplicidad $k \Rightarrow$ vamos a obtener k soluciones l.i. asociadas a esa raíz, de la forma:

$$e^{\beta x}, xe^{\beta x}, \ldots, x^{k-1}e^{\beta x}$$

Si el polinomio característico tiene raíces no reales ($\lambda = a \pm ib$), entonces podemos conseguir dos funciones reales l.i. que seran soluciones del sistema homogéneo:

$$\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$$

La búsqueda de la solución particular por el método de coeficientes indeterminados implica proponer una forma de la función solución y_p, para cierto tipo de función f.

Pegamos aquí una tabla con algunos de los casos:

f	y_p	Raíces pol. caract.
P_n	P_n	$r \neq 0$
P_n	P_{n+1}/P_{n+k}	$r=0$ raíz simple/$r=0$ raíz mult.k
$e^{\lambda x}$	$ke^{\lambda x}$	si $r \neq \lambda$
$e^{\lambda x}$	$P_k\ e^{\lambda x}$	si λ es raíz de mult. k
sen(cx)	$k_1$sen$(cx)+k_2\cos(cx)$	si $r \neq ci$
sen(cx)	$P_k$sen$(cx)+Q_k\cos(cx)$	si $r=ci$ raíz de multip k
$\cos(cx)$	$k_1$sen$(cx)+k_2\cos(cx)$	$r \neq ci$

Cuadro 1: Propuestas de y_p, para $L(y)=f$. Notación: P_k polinomio a coef. reales de grado k.

Empecemos con los primeros ejemplos:

1. Encontrar todas las soluciones de los sistemas homogéneos:

   a $y''+5y'+6y=0$

b $y'' + 4y' + 4y = 0$

c $y'' - 4y' + 13y = 0$

Resolución:

Todo se reduce a encontrar las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación diferencial en cada caso

En el caso a. tenemos: $r^2 + 5r + 6 = 0 \Longleftrightarrow r = -2$ o $r = -3$.

En el caso b. tenemos $r^2 + 4r + 4 = 0 \Longleftrightarrow r = -2$, $r = -2$ es raíz de multiplicidad 2 del polinomio.

En el caso c. tenemos: $r^2 - 4r + 13 = 0 \Longleftrightarrow r = 2 + 3i$ o $r = 2 - 3i$.

Así que ya tenemos las soluciones en cada caso:

a Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones que están el subespacio $S_{Ha} =$ gen$\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$.

b Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones que están el subespacio $S_{Hb} =$ gen$\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$.

c Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones que están el subespacio $S_{Hc} =$ gen$\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\text{sen}(3x)\}$.

---

2. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas:

a $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 3x + e^{2x}$

b $y'' + 4y' + 4y = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$

c $y'' - 4y' + 13y = \cos(x)$

Resolución:

Como ya tenemos, en cada caso, las soluciones de la ecuación homogénea nos dedicaremos directamente a la búsqueda de la solución particular.

Para el item a. tenemos como $f = (x^2 + 3x) + e^{2x}$.

Como la ecuación es lineal, podemos buscar una solución particular y_{p1} tal que $L(y_{p1}) = x^2 + 3x$ y otra y_{p2} tal que $L(y_{p2}) = e^{2x}$. De esa forma si tomamos $y_p = y_{p1} + y_{p2} \Longrightarrow L(y_p) = L(y_{p1} + y_{p2}) =$
$= L(y_{p1}) + L(y_{p2}) = (x^2 + 3x) + e^{2x}$ ✓

Buscamos y_p1, para eso proponemos como solución particular $y_p1 = ax^2 + bx + c$ y reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$2a + 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = x^2 + 3x$$

$$6ax^2 + (10a + 6b)x + 2a + 5b + 6c = x^2 + 3x$$

Igualando coeficiente a coeficiente, queda:

$$a = \frac{1}{6},\ b = (3 - \frac{10}{6})\frac{1}{6} = \frac{2}{9},\ c = \frac{-5b-2a}{6} = -\frac{13}{54}$$

Obtenemos $\boxed{y_{p1} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{13}{54}}$

Proponemos $y_{p2} = ke^{2x}$ y reemplazamos en la ecuación para encontrar el valor de k :

$$4ke^{2x} + 10ke^{2x} + 6ke^{2x} = e^{2x} \Longleftrightarrow 20k = 1 \Longleftrightarrow k = \frac{1}{20}.$$

Obtenemos $\boxed{y_{p2} = \frac{1}{20}e^{2x}}$

De esta manera conseguimos una solución particular:

$$\boxed{y_p = y_{p1} + y_{p2} = (\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{4}{3}x - \tfrac{21}{3}) + \tfrac{1}{20}e^{2x}}$$

Buscamos una solución particular en el item b.

Aquí $f = e^{\lambda x}$ El polinomio característico asociado a la ecuación homogénea tenía una raíz doble en $r = -2$.

Busquemos la solución particular en los dos casos posibles: $\lambda \neq -2$ y $\lambda = -2$.

$\boxed{\text{CASO } \lambda \neq -2}$

Proponemos $y_p = ke^{\lambda x}$, reemplazamos en la ecuación y queda:

$k\lambda^2 e^{\lambda x} + 4k\lambda e^{\lambda x} + 4ke^{\lambda x} = e^{\lambda x}$

$ke^{\lambda x}(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = e^{\lambda x}$

$k(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 1$ y como $\lambda^2 + 4\lambda + 4 \neq 0$ porque $\lambda \neq -2$

$$k = \frac{1}{\lambda^2 + 4\lambda + 4} \text{ y entonces } \boxed{y_p = \frac{1}{\lambda^2+4\lambda+4}e^{\lambda x}}$$

$\boxed{\text{CASO } \lambda = -2}$

Si $\lambda = -2$, como el polinomio característico tiene a este valor como raíz doble, proponemos $y_p = Kx^2e^{-2x}$ y reemplazando obtenemos:

$e^{-2x}(4kx^2 - 8kx + 2k) + 4e^{-2x}(2kx - 2kx^2) + 4kx^2e^{-2x} = e^{-2x} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}}$

Para el item c.

Aquí $f = \cos(x)$ y proponemos una solución particular de la forma:

$y_p = A\cos(x) + B\text{sen}(x)$ y reemplazamos en la ecuación:

$$(-A\cos(x) - B\text{sen}(x)) - 4(-A\text{sen}(x) + B\cos(x)) + 13(A\cos(x) + B\text{sen}(x)) = \cos(x)$$
$$(12A - 4B)\cos(x) + (4A + 12B)\text{sen}(x) = \cos(x)$$

Como $\cos(x)$ y sen(x) son funciones l.i, para que se cumpla la igualdad debe cumplirse:

$12A - 4B = 1$ y $4A + 12B = 0$, de aquí:
$A = \frac{3}{40}$ y $B = \frac{-1}{40}$

Obtenemos para este caso:

$$\boxed{y_p = \frac{3}{40}\text{cos}(x) - \frac{1}{40}\text{sen}(x)}$$

Planteamos entonces la solución general en cada item:

a $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 3x + e^{2x}$
Tenemos que:
$S_{Ha} = \text{gen}\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$.
$y_p = y_{p1} + y_{p2} = (\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{21}{3}) + \frac{1}{16}e^{2x}$
La solución general es:

$$\boxed{y_G(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{-3x} + (\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{21}{3}) + \frac{1}{20}e^{2x}}$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

b $y'' + 4y' + 4y = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$

Tenemos que:

$S_{Hb} = \text{gen}\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$.

$\boxed{\text{CASO } \lambda \neq -2}$

$y_p = \frac{1}{\lambda^2+4\lambda+4}e^{\lambda x}$

Así que :

$$\boxed{y_G = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x} + \frac{1}{(\lambda^2+4\lambda+4)}e^{\lambda x}}$$

$\boxed{\text{CASO } \lambda = -2}$

En este caso:

$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$

Así que :

$$\boxed{y_G(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}}$$

c $y'' - 4y' + 13y = \cos(x)$

Ya calculamos que:

$S_{Hc} = \text{gen}\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\text{sen}(3x)\}$ $y_p = \frac{3}{10}\text{cos}(x) - \frac{1}{10}\text{sen}(x)$

Así que podemos escribir la solución general:

$$\boxed{y_G(x) = k_1 e^{2x}\text{cos}(3x) + k_2 e^{2x}\text{sen}(3x) + \frac{3}{40}\text{cos}(x) - \frac{1}{40}\text{sen}(x)}$$