Ejercicios matriz de una transformación lineal

Adriana Cabana y Patricia Palacios

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, UBA

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y B_2 bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, respectivamente, y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal.

La matriz de T en las bases B_1, B_2, $[T]_{B_1}^{B_2}$, es la matriz cuya columna i es el vector de coordenadas de $T(v_i)$ en la base B_2, esto es: $[T]_{B_1}^{B_2} = \left([T(v_1)]^{B_2} \cdots [T(v_n)]^{B_2}\right)$

Verifica que $[T]_{B_1}^{B_2}[v]^{B_1} = [T(v)]^{B_2}$ para todo $v \in \mathbb{V}$

1. Dadas la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(p) = x^2 p''(x) + p'(x) + 3p(x)$ y las bases de $\mathbb{R}_2[x]$, $B_1 = \{1 + x, 2 + x^2, x - x^2\}$ y $B_2 = \{x^2, 1 + x, 1 - x\}$, calcular $[T]_{B_1}^{B_2}$.

   La matriz pedida es

   $$[T]_{B_1}^{B_2} = \left([T(1+x)]^{B_2}\ [T(2+x^2)]^{B_2}\ [T(x-x^2)]^{B_2}\right)$$

   Para armar la matriz necesitamos conocer los transformados de la base B_1, entonces calculamos, aplicando la fórmula de T:

   $\mathrm{T}\,(1+\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 \cdot 0 + 1 + 3\,(1+\mathrm{x}) = 4 + 3x$

   $\mathrm{T}\left(2+\mathrm{x}^2\right) = \mathrm{x}^2 \cdot 2 + 2\mathrm{x} + 3\left(2+\mathrm{x}^2\right) = 6 + 2x + 5x^2$

   $\mathrm{T}\left(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2\right) = \mathrm{x}^2.\,(-2) + 1 - 2\mathrm{x} + 3\left(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2\right) = 1 + x - 5x^2$

   Ahora debemos hallar las coordenadas de estos polinomios en la base B_2:

   Si las coordenadas son $[4+3x]^{B_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, planteamos $4 + 3x = ax^2 + b\,(1+x) + c\,(1-x)$.

   Igualando ambos polinomios llegamos al siguiente sistema: $\begin{cases} b+c &= 4 \\ b-c &= 3 \\ a &= 0 \end{cases}$

   Resolviendo obtenemos: $a = 0$, $b = \frac{7}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ por lo tanto: $[4+3x]^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   Repetimos el procedimiento con los otros polinomios:

   Planteamos $6 + 2x + 5x^2 = ax^2 + b\,(1+x) + c\,(1-x)$

   Igualando ambos polinomios llegamos al siguiente sistema: $\begin{cases} b+c &= 6 \\ b-c &= 2 \\ a &= 5 \end{cases}$

   Resolviendo obtenemos: $a = 5$, $b = 4$, $c = 2$ por lo tanto: $\left[6+2x+5x^2\right]^{B_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Por último planteamos $1 + x - 5x^2 = ax^2 + b\,(1+x) + c\,(1-x)$

Igualando ambos polinomios llegamos al siguiente sistema: $\begin{cases} b+c & = 1 \\ b-c & = 1 \\ a & = -5 \end{cases}$

Resolviendo obtenemos: $a = -5$, $b = 1$, $c = 0$ por lo tanto: $\left[1 + x - 5x^2\right]^{B_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Con esta información ya podemos armar la matriz pedida:

$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ \frac{7}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal tal que $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ para

$B_1 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ y $B_2 = \{1, x - x^2, x^2\}$.

  a) Hallar bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$.
  b) Hallar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(\mathbf{x}) = 2x - x^2$.
  c) Dado el subespacio $S = gen\{(1,0,1), (2,1,-1)\}$, hallar una base de $T(S)$.

  a) Comencemos calculando $\mathrm{Nu(T)} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathrm{T}\,(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathrm{P}_2}\right\}$.
  Usaremos la matriz de la transformación para hallar los vectores que cumplen esta condición, para ello recordemos que:
  $$[T]_{B_1}^{B_2}[x]^{B_1} = [T(x)]^{B_2}$$
  Nos conviene plantear el vector $\mathbf{x}$ buscado como combinación lineal de los vectores de la base B_1 :
  $$\mathbf{x} = a\,(1,1,0) + b\,(1,0,1) + c\,(0,1,1)$$
  Así sus coordenadas en esta base son: $[\mathbf{x}]^{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
  Reemplazando en $[T]_{B_1}^{B_2}[x]^{B_1} = [T(x)]^{B_2}$, tenemos que:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  Si resolvemos este sistema de ecuaciones homogéneo, obtenemos: $a = -2c$, $b = c$, $c \in \mathbb{R}$.
  Con esta información volvemos al vector $\mathbf{x}$:
  $$\mathbf{x} = (-2c)\,(1,1,0) + c\,(1,0,1) + c\,(0,1,1) = c\,(-1,-1,2)$$
  Concluimos que
  $$\mathrm{Nu\,(T)} = \mathrm{gen}\,\{(-1,-1,2)\}$$
  Como el conjunto $\{(-1,-1,2)\}$ es linealmente independiente y genera $\mathrm{Nu\,(T)}$, este conjunto es base de $\mathrm{Nu\,(T)}$ y $\dim(\mathrm{Nu\,(T)}) = 1$.

  Para hallar la imagen de T recordemos que las columnas de la matriz son las coordenadas en base B_2 de los vectores trasformados de la base B_1 o sea son las coordenadas de vectores que generan $\mathrm{Im\,(T)}$.
  Recontruyamos esos vectores:

- $[T(1,1,0)]^{B_2} = (1\ 1\ 2)^T$ entonces $T(1,1,0) = 1\cdot 1 + 1\left(x - x^2\right) + 2x^2 = 1 + x + x^2$
- $[T(1,0,1)]^{B_2} = (1\ -1\ 1)^T$ entonces $T(1,0,1) = 1\cdot 1 + (-1)(x - x^2) + 1x^2 = 1 - x + 2x^2$
- $[T(0,1,1)]^{B_2} = (1\ 3\ 3)^T$ entonces $T(0,1,1) = 1\cdot 1 + 3\left(x - x^2\right) + 3x^2 = 1 + 3x$

Con esto tenemos:

$$\mathrm{Im(T) = gen}\left\{\mathrm{1 + x + x^2, 1 - x + 2x^2, 1 + 3x}\right\}$$

El teorema de la dimensión nos dice: $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim\left(\mathrm{Nu}\left(\mathrm{T}\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{T}\right)\right)$.

Como ya calculamos $\mathrm{Nu}\left(\mathrm{T}\right)$, deducimos que $\dim\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{T}\right)\right) = 2$, por lo que el conjunto generador anterior resulta un conjunto LD.

Observemos que en este caso, $1 + 3x = 2(1 + x + x^2) - (1 - x + 2x^2)$.

Para dar una base de $\mathrm{Im}\left(\mathrm{T}\right)$ necesitamos dos vectores linealmente independientes, por ejemplo: $\left\{1 + x - x^2, 1 - x + 2x^2\right\}$.

b) Para hallar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que $T(\mathbf{x}) = 2x - x^2$, usaremos la matriz de T, ya que sabemos que: $[T]_{B_1}^{B_2}[x]^{B_1} = [T(x)]^{B_2}$.

En este caso buscamos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$[T]_{B_1}^{B_2}[\mathbf{x}]^{B_1} = [T(\mathbf{x})]^{B_2} = [2x - x^2]^{B_2}$$

Planteamos el vector que buscamos: $\mathbf{x} = \mathrm{a}\,(1,1,0) + \mathrm{b}\,(1,0,1) + \mathrm{c}\,(0,1,1)$.

Entonces sus coordenadas en base B_1 son: $[x]^{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Además necesitamos conocer $\left[2x - x^2\right]^{B_2} = (\alpha\ \beta\ \gamma)^T$:

Planteamos $\mathrm{2x - x^2} = \alpha\cdot 1 + \beta\left(\mathrm{x - x^2}\right) + \gamma\mathrm{x^2}$ e igualando estos polinomios obtenemos: $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

Reemplazando en $[T]_{B_1}^{B_2}[\mathbf{x}]^{B_1} = [T(\mathbf{x})]^{B_2} = [2x - x^2]^{B_2}$ llegamos al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema no homegéneo (escalonando la matriz ampliada) y obtenemos: $a = 1 - 2c$, $b = c - 1$, $c \in \mathbb{R}$, entonces las coordenadas de $\mathbf{x}$ son $[\mathbf{x}]^{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2c \\ c - 1 \\ c \end{pmatrix}$.

Luego, los vectores $\mathbf{x}$ que buscamos son:

$$\mathbf{x} = \mathrm{(1 - 2c)\,(1,1,0) + (c - 1)\,(1,0,1) + c\,(0,1,1) = (0,1,-1) + c\,(-1,-1,2)}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Observemos que la solución está formada por una solución particular más vectores del núcleo.

c) Dado el subespacio $S = gen\{(1,0,1),(2,1,-1)\}$, queremos hallar una base de T(S).

Sabemos que $\mathrm{T(S)} = gen\left\{T(1,0,1), T(2,1,-1)\right\}$, sólo resta calcular $T(1,0,1)$ y $T(2,1,-1)$.

Observemos que $(1,0,1)$ es uno de los vectores de la base $\mathrm{B_1}$ y su imagen ya la calculamos cuando hallamos la imagen de T obteniendo $T\left(1,0,1\right) = 1 - x + 2x^2$.

Para calcular $T(2,1,-1)$ usaremos la matriz de T ya que: $[T]_{B_1}^{B_2}[x]^{B_1} = [T(x)]^{B_2}$.

Necesitamos las coordenadas en base $\mathrm{B_1}$ del vector $(2,1,-1)$, entonces planteamos:

$$(2,1,-1) = \mathrm{a}\,(1,1,0) + \mathrm{b}\,(1,0,1) + \mathrm{c}\,(0,1,1)$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a+b &= 2 \\ a+c &= 1 \\ b+c &= -1 \end{cases}$, obtenemos $[(2,1,-1)]^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Reemplazando en $[T]_{B_1}^{B_2}[x]^{B_1} = [T(x)]^{B_2}$ obtenemos:

$$[T]_{B_1}^{B_2}[(2,1,-1)]^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = [T(2,1,-1)]^{B_2}$$

Obtenemos las coordenadas de $T(2,1,-1)$ en base B_2, recontruimos el vector:
$T(2,1,-1) = 1 \cdot 1 + (-1)\left(x - x^2\right) + 1x^2 = 1 - x + 2x^2$ (el mismo!!!)
Por lo tanto: $\mathrm{T}\left(\mathrm{S}\right) = gen\left\{1 - x + 2x^2\right\}$ y una base de T(S) es $\left\{1 - x + 2x^2\right\}$.

3. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (3x + y - z, y + 2z)$. Hallar bases B de $\mathbb{R}^3$ y B' de $\mathbb{R}^2$ de modo tal que $[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Buscamos bases $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ de modo tal que

$$[T]_B^{B'} = \left([T(v_1)]^{B'} \quad [T(v_2)]^{B'} \quad [T(v_3)]^{B'}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

- $[T(v_1)]^{B'} = (1 \;\; -1)^T$, es decir $T(v_1) = w_1 - w_2$.
- $[T(v_2)]^{B'} = (2\;1)^T$, es decir $T(v_2) = 2w_1 + w_2$.
- $[T(v_3)]^{B'} = (0\;0)^T$, es decir $T(v_3) = (0,0)$ y entonces $v_3 \in Nu(T)$.

Observemos que no hay únicas bases B y B' que verifiquen estas condiciones. El ejercicio sólo pide dar una base B y una base B' que las cumplan.

Para elegir v_3 es necesario conocer el núcleo de T.

En este caso, $Nu(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, T(x,y,z) = (0,0)\}$.

Por lo tanto, $(x,y,z) \in Nu(T) \Leftrightarrow T(x,y,z) = (3x + y - z, y + 2z) = (0,0)$

O sea, los elementos de $Nu(T)$ son las soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ \qquad y + 2z = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema obtenemos $x = z$, $y = -2z$, $z \in \mathbb{R}$. Entonces los vectores del núcleo de T son de la forma $(x,y,z) = (z, -2z, z) = z(1,-2,1)$ y $Nu(T) = gen\{(1,-2,1)\}$.

Podemos elegir, por ejemplo, $v_3 = (1,-2,1)$.

Ahora, podemos elegir v_1 y v_2 y, a partir de esta elección, determinar w_1 y w_2 o hacer al revés, elegir w_1 y w_2 y a partir de esta elección determinar v_1 y v_2. Vamos a optar por la primera posibilidad porque es más sencilla.

Elegimos v_1 y v_2 de modo tal que $B = \{v_1, v_2, (1,-2,1)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $v_1 = (1,0,0)$ y $v_2 = (0,1,0)$.

Es fácil ver que $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,-2,1)\}$ es un conjunto LI y, como tiene 3 elementos, es una base de $\mathbb{R}^3$.

Veamos ahora como obtenemos la base B'. Habíamos dicho que se debe verificar que

$$T(v_1) = w_1 - w_2 \quad y \quad T(v_2) = 2w_1 + w_2$$

Entonces, como $T(v_1) = T(1,0,0) = (3,0)$ y $T(v_2) = T(0,1,0) = (1,1)$, w_1 y w_2 verifican:

$$\begin{cases} w_1 - w_2 = (3,0) \\ 2w_1 + w_2 = (1,1) \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos que $3w_1 = (4,1)$, ésto es, $w_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Despejando w_2 de la primera ecuación y reemplazando el w_1 hallado, obtenemos:
$w_2 = w_1 - (3,0) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) - (3,0) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$
Luego, $B' = \left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ (es una base de $\mathbb{R}^2$ porque tiene 2 elementos y es un conjunto LI, al ser sus elementos no múltiplos).

4. Sean $B_1 = \{(1,2),(1,1)\}$ y $B_2 = \{(0,1),(-1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y E, E' las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Dadas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[G]_{B_1}^{E'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcular $[G \circ T]_E^{E'}$
   b) Calcular $[T^{-1}]_{B_2}^{B_1}$ y $[T^{-1}]_E$.

Para resolver este ejercicio recordemos que:

- Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $G : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ transformaciones lineales, B_1, B_2 y B_3 bases de $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$, respectivamente. Entonces
$$[G \circ T]_{B_1}^{B_3} = [G]_{B_2}^{B_3} \cdot [T]_{B_1}^{B_2}$$
- Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ un isomorfismo y B_1 y B_2 bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, respectivamente. Entonces
$$[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = ([T]_{B_1}^{B_2})^{-1}$$
- Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, B_1, B_1' bases de $\mathbb{V}$ y B_2, B_2' bases de $\mathbb{W}$. Entonces
$$[T]_{B_1'}^{B_2'} = M_{B_2}^{B_2'} [T]_{B_1}^{B_2} M_{B_1'}^{B_1}$$

a) Para calcular $[G \circ T]_E^{E'}$, observemos que $G \circ T = G \circ Id_{\mathbb{R}^2} \circ T \circ Id_{\mathbb{R}^2}$, luego:

$$[G \circ T]_E^{E'} = [G]_{B_1}^{E'} M_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} M_E^{B_1}$$

$$[G \circ T]_E^{E'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -7 \\ 11 & -4 \\ -46 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Veamos primero que T es inversible ya que $det([T]_{B_1}^{B_2}) = 1 \neq 0$. Luego

- $[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = ([T]_{B_1}^{B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- $[T^{-1}]_E = M_{B_1}^E [T^{-1}]_{B_2}^{B_1} M_E^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$