Episodio 8

Intersección y Suma de Subespacios.

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

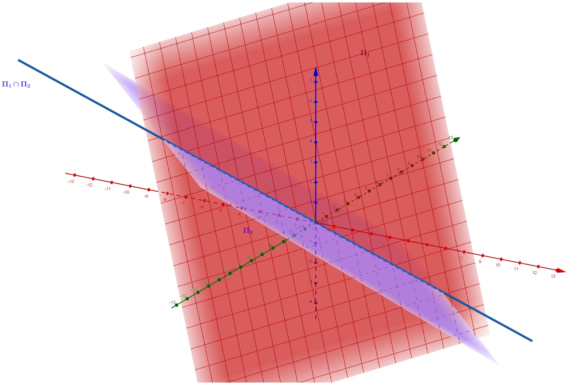
11 de octubre de 2020

Vamos a empezar por ver qué pasa si realizamos con subespacios las operaciones más elementales entre conjuntos que son la intersección y la unión.

Recordemos, por las dudas: Si A y B son dos conjuntos cualesquiera:

- $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$
- $A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$

¿Qué pasa cuando los conjuntos son subespacios?
¿Obtenemos otro subespacio al calcular el conjunto que resulta de intersecar dos subespacios o de unir dos subespacios?
Para ejemplificar, miremos el caso particular de buscar en $\mathbb{R}^3$ la intersección de dos planos que pasan por el origen.



En $\mathbb{R}^3$, la intersección de dos planos, que contienen al origen, es una recta que pasa por el origen.

Para lo que sigue $S_1,\ S_2 \subset \mathbb{V}$ son subespacios de $\mathbb{V}$.

Observaciones:

Si $S_1,\ S_2 \subset \mathbb{V}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ $\Rightarrow S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.(Sólo tenemos que demostrar que se cumplen las tres condiciones.)

Como S_1 y S_2 son subespacios

$\boxed{0_{\mathbb{V}} \in S_1 \text{ y } 0_{\mathbb{V}} \in S_2 \Rightarrow 0_{\mathbb{V}} \in S_1 \cap S_2.}$ ✓

Si u_1 y $u_2 \in S_1 \cap S_2$ esto quiere decir que:

$u_1,\ u_2 \in S_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in S_1$, porque S_1 es subespacio.

$u_1,\ u_2 \in S_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in S_2$, porque S_2 es subespacio.

Por lo tanto $u_1 + u_2 \in S_1 \cap S_2$. ✓

Por último, si $u \in S_1 \cap S_2$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S_1$ y $\lambda u \in S_2$ (¿por qué?)

Luego $\lambda u \in S_1 \cap S_2$✓

Demostramos que:

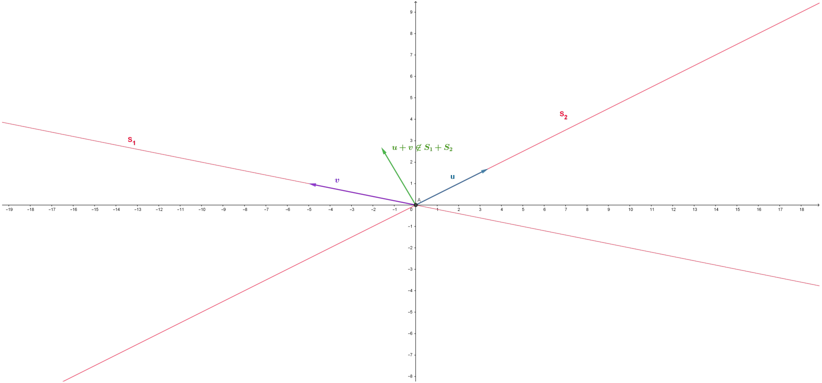
$\boxed{\text{Si } S_1,\ S_2 \subset \mathbb{V} \text{ son subespacios de } \mathbb{V} \ \Rightarrow S_1 \cap S_2 \text{ es un subespacio.}}$

b. Si $T \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ tal que $T \subset S_1$ y $T \subset S_2$, entonces $T \subset S_1 \cap S_2$.

A veces se dice que $S_1 \cap S_2$ es el subespacio **"más grande"** incluido a la vez en S_1 y S_2, pues cualquier otro que contenga elementos que están en S_1 y en S_2, está incluido en la intersección.

La demostración es inmediata, pues si $T \subset S_1$ y $T \subset S_2$, por lo tanto si $x \in T \Rightarrow x \in S_1$ y $x \in S_2 \Rightarrow x \in S_1 \cap S_2$, en tonces $T \subset S_1 \cap S_2$.

Veamos ahora que pasa con la unión de subespacios. Otra vez miremos un caso muy sencillo: la unión de dos rectas que contienen al origen en $\mathbb{R}^2$.



La única condición necesaria para probar que un conjunto es un subespacio que no se cumple siempre, es la de ser **cerrado** para la suma.

Por eso se define la **suma** de subespacios:

Definición: Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, se llama **suma** de S_1 y S_2 al conjunto:

$$S_1 + S_2 = \{v \in V / v = s_1 + s_2, \text{ con } s_1 \in S_1 \text{ y } s_2 \in S_2\}$$

Observaciones:

a. $S_1 + S_2$ es un subespacio. Tenemos que probar que se cumplen las tres condiciones que caracterizan a un subespacio.
En inmediato que $0_{\mathbb{V}} = \underbrace{0_{\mathbb{V}}}_{\in S_1} + \underbrace{0_{\mathbb{V}}}_{\in S_2}, \in S_1 + S_2.$✓Si $u_1 \in S_1 + S_2$ y $u_2 \in S_1 + S_2$ tenemos que chequear si $u_1 + u_2 \in S_1 + S_2$. Pero si $u_1 \in S_1 + S_2 \Rightarrow$ existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, $u_1 = s_1 + s_2$ y lo mismo sucede con $u_2 \in S_1 + S_2$, existen t_1 y t_2, tal que $u_2 = t_1 + t_2$.
Luego:

$$
\begin{aligned}
u_1 + u_2 &= (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \\
&= \underbrace{(s_1 + t_1)}_{\in S_1 \text{ pues es subespacio}} + \underbrace{(s_2 + t_2)}_{\in S_2 \text{ pues es subespacio}} \in S_1 + S_2. \checkmark
\end{aligned}
$$

Tarea para el hogar demostrar la tercera condición.

b. Si $S_1 = \text{gen}\{v_1 \dots v_k\}$ y $S_2 = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_1 + S_2 = gen\{v_1, \dots v_k, w_1, \dots, w_m\}$
Pues $v \in S_1 + S_2 \iff v = s_1 + s_2$, pero como
$S_1 = \text{gen}\{v_1 \dots v_k\}$ y $S_2 = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$,
$s_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ y
$s_2 = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$; con$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$.
Entonces
$$v = s_1 + s_2 = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m}_{\text{comb. lineal de } v_1, \dots v_k, w_1, \dots, w_m}$$
Por lo que $S_1 + S_2 = gen\{v_1, \dots v_k, w_1, \dots, w_m\}$. ✓

c. $(S_1 \cup S_2) \subset (S_1 + S_2)$. Es directo, queda como tarea.

d. Todo subespacio que contiene a $S_1 \cup S_2$ incluye también a $S_1 + S_2$.
Sea $x \in S_1 + S_2$ y sea T un subespacio que contiene a $S_1 \cup S_2$, como $x \in S_1 + S_2 \to x = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, como T contiene a $S_1 \cup S_2 s_1 \in T$ y $s_2 \in T$, como además Tes subespacio $\Rightarrow s_1 + s_2 = x \in T$.
Demostramos que $\forall x \in S_1 + S_2 \Rightarrow x \in T$, por lo tanto queda demostrado que $\boxed{S_1 + S_2 \subset T.}$ ✓
Se dice que $S_1 + S_2$ es el **"menor"** subespacio que incluye a $S_1 \cup S_2$, pues cualquier otro subespacio que contenga a la unión forzosamente contiene a $S_1 + S_2$.

Ejemplo simple:

Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,
$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$ y
$S_2 = \text{gen}\{[1\ 0\ 1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 1\ 1]^T\}$ encontrar $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$.

Resolución:

Empecemos por buscar los puntos en común de S_1 y S_2:
Si $x \in S_2 \Rightarrow x = \alpha[1\ 0\ 1\ 0]^T + \beta[0\ 0\ 1\ 1]^T$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Si además está en S_1, tiene que cumplir sus ecuaciones. Entonces buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $x = [\alpha\ 0\ \alpha + \beta\ \beta]^T \in S_1 \Leftrightarrow$
$\alpha - 0 + \beta = 0$ y $0 + (\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$.
Por lo tanto $x \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow x = [\alpha\ 0\ 0\ -\alpha]^T = \alpha[1\ \ 0\ \ 0\ -1]^T$.
Entonces $S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{[1\ \ 0\ \ 0\ -1]^T\}$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Calculemos ahora $S_1 + S_2$, según lo que vimos en la observación **b.** basta con construir un conjunto generador formado por los generadores de S_1 y S_2.
De la definición de S_1, despejando de la primera ecuación obtenemos: $x_1 = x_2 - x_4$.
Y de la segunda ecuación: $x_3 = -x_2$ $x \in S_1$ si
$x = [x_2 - x_4 \;\; x_2 \;\; -x_2 \;\; x_4]^T$ con $x_2,\ x_4 \in \mathbb{R}$.
$x \in S_1 \Leftrightarrow x = x_2[1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 0]^T + x_4[-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T$
Por lo que $S_1 = \text{gen}\{[1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 0]^T, \ [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T\}$
Este conjunto es l.i, por lo que además sabemos que $\dim(S_1) = 2$.
Como ya encontramos $S_1 \cap S_2$, podemos encontrar una base de S_1 que contenga una base de $S_1 \cap S_2$, por ejemplo:
$B_{S_1} = \{[1 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 0]^T, \ [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1]^T\}$.

Busquemos ahora una base de S_2 que contenga una base $S_1 \cap S_2$, por ejemplo: $B_{S_2} = \{[1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -1]^T, \ [0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1]^T\}$.
Teniendo estas bases de S_1 y S_2, resulta evidente que al formar el conjunto de generadores de $S_1 + S_2$, no vamos a repetir el generador de la intersección de los subespacios. Entonces obtenemos :

$$S_1 + S_2 = \text{gen}\{[1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 0]^T, \ [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -1]^T, \ [0\ 0\ 1\ 1]^T\}.$$

Obviamente $\dim(S_1 + S_2) = 3$.
Se cumple que :
$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$
Esta última igualdad se cumple para todo par de subespacios finitos.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Teorema: Dados S_1 y S_2 subespacios de dimensión finita, entones: $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

Demostración:

Si $\dim(S_1) = n$, $\dim(S_2) = m$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = k$, $k \geq 0$, vamos a demostrar que $\dim(S_1 + S_2) = n + m - k$.

La forma de demostrarlo será una generalización de la resolución del ejemplo.

Supongamos primero $k \geq 1$, entonces existe una base $B_{S_1 \cap S_2} = \{v_1, \dots, v_k\}$, podemos extender esa base a una base de S_1, $B_{S_1} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ y también a una base de S_2, $B_{S_2} = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$

Por lo visto sabemos que

$$S + T = \text{gen}\{\underbrace{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n}_{\text{n elementos}}, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_m}_{m-k \text{ elementos}}\}$$

Sólo tenemos que ver que este sistema de generadores es l.i.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Igualamos una combinación lineal a $0_{\mathbb{V}}$:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n + \beta_1 w_{k+1} + \cdots + \beta_{m-k} w_m = 0_{\mathbb{V}} \quad (1)$$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n}_{\in S_1} = \underbrace{-\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m}_{\in S_2}$$

Entonces: $-\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_k v_k$
$0_{\mathbb{V}} = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_k v_k + \beta_1 w_{k+1} + \cdots + \beta_{m-k} w_m$
Como $\{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_m\}$ es un conjunto l.i. pues es una base de S_2 concluimos que todos los escalares son nulos, en particular: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{m-k} = 0$.
Reemplazamos en (1).

Y obtenemos:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Y de aquí, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conj. l.i. obtenemos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Como los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{m-k}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vienen de la combinación lineal (1), concluimos que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n, w_{k+1}, \ldots, w_m - k\}$ es l.i.

Entonces podemos afirmar que :

$\dim(S_1 + S_2) = n + m - k = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

Queda como tarea para el hogar, verificar la fórmula cuando la intersección es el subespacio nulo, en ese caso no existe base de la intersección y directamente trabahjamos con las bases de cada subespacio.

Suma directa de subespacios.

Por definición, cada elemento del subespacio $S_1 + S_2$, puede expresarse en la forma $v = s_1 + s_2$, con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, pero esa descomposición no siempre es única.

En el ejemplo que vimos, si tomamos:

$$v = [2\ \ 1\ 0\ 0]^T = \underbrace{[1\ \ 1 - 1\ 0]^T + [1\ \ 0\ \ 0 - 1]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]}_{\in S_2}$$

$$v = [2\ \ 1\ 0\ 0]^T = \underbrace{[2\ \ 1 - 1\ \ - 1]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]}_{\in S_2}$$

Pero también podemos escribir:

$$v = [2\ \ 1\ 0\ 0]^T = \underbrace{[1\ \ 1 - 1\ 0]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[1\ \ 0\ \ 0 - 1]^T + [0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]}_{\in S_2}$$

$$v = [2\ \ 1\ 0\ 0]^T = \underbrace{[1\ \ 1 - 1\ 0]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[1\ \ 0\ \ 1\ 0]^T}_{\in S_2}$$

Cuando cada $v \in S_1 + S_2$ puede descomponerse en forma única como suma de un elemento de S_1 y un elemento de S_2, se dice que la suma es **directa**.

Definición: Se dice que la suma de S_1 y S_2 es **directa**, o que S_1 y S_2 están en suma directa si, para cada $v \in S_1 + S_2$ existen únicos $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tal que $v = s_1 + s_2$.
Cuando la suma es directa, se nota: $S_1 \oplus S_2$

Observación:

$$\boxed{S_1 \text{ y } S_2 \text{ están en suma directa si y sólo si } S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}}$$

$\Rightarrow$) Supongamos que S_1 y S_2 están en suma directa y sea $v \in S_1 \cap S_2$.

$$v \in S_1 \Rightarrow v = \underbrace{v}_{\in S_1} + \underbrace{0_v}_{\in S_2}, v \in S_2 \Rightarrow v = \underbrace{0_v}_{\in S_1} + \underbrace{v}_{\in S_2}.$$

Pero si S_1 y S_2 están en suma directa la descomposición es única, por lo tanto $v = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}.\checkmark$

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y sea $v \in S_1 + S_2$ tal que $v = s_1 + s_2$ y $v = t_1 + t_2$ con $s_1, t_1 \in S_1$ y $s_2, t_2 \in S_2$.

Entonces: $v = s_1 + s_2 = t_1 + t_2 \Rightarrow \underbrace{s_1 - t_1}_{\in S_1} = \underbrace{t_2 - s_2}_{\in S_2}$

$S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow s_1 - t_1 = 0_{\mathbb{V}} = t_2 - s_2, s_1 = t_1$ y $s_2 = t_2$.

Demostramos que si $S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow S_1$ y S_2 están en suma directa.$\checkmark$

- También se puede probar que si B_1 es base de S_1 y B_2 es base de S_2, la suma $S_1 + S_2$ es directa si y sólo si $B = B_1 \cup B_2$ es l.i.
- Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita y S es un subespacio de $\mathbb{V}$, existe un subespacio W tal que : $S \oplus W = \mathbb{V}$
Si $S = \mathbb{V}$ o $S = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow W = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $W = \mathbb{V}$ respectivamente.
Si $1 \leq \dim S = k \leq n-1$, existe una base $B_S = \{v_1, \ldots, v_k\}$
Sabemos que esta base puede extenderse a una base de $\mathbb{V}$, o sea, existen $v_{k+1}, \ldots, v_n$ tales que
$B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$.
Entonces si consideramos $W = \text{gen}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, se cumple que $S \oplus W = \mathbb{V}$.
De esta demostración es evidente que el subespacio W cumple $S \oplus W = \mathbb{V}$ no es único, para cualquier subespacio no trivial de $\mathbb{V}$.

Definición: Dado un subespacio $S \subset \mathbb{V}$,$\mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que W es un suplemento de S si $S \oplus W = \mathbb{V}$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires