"Apagá el televisor.
Si lo que te gusta es gritar,
Desenchufa el cable del parlante.
El silencio tiene acción
El mas cuerdo es el más delirante..."
Charly García

Tercera Reunión Espacios Vectoriales. Curso 1.

Coordenadas con respecto a una base.

Estuvimos trabajando con el concepto de base de un espacio vectorial y definimos:

Si $\mathbb{V} - \mathbb{K}$espacio vectorial, se dice que un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es **base** de $\mathbb{V}$ si cumple:

- $\text{gen}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{V}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Además, $\dim(V) = n$.

Observaciones:

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es una base de $\mathbb{V}$ siempre se cumple:

a. Para cada $v \in \mathbb{V}$ existen únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que:
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$
(La descomposición de un vector con respecto a una base es única.)

Son dos las afirmaciones: todo vector es combinación lineal de los vectores de la base y además la combinación lineal es única.

La primera es obvia pues si B es base de $\mathbb{V}$, por definición $\text{gen}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{V}$, esto quiere decir que si $v \in \mathbb{V} \Rightarrow v$ es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. O sea existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Para ver que existe una única combinación lineal basta con suponer que hay otra y demostrar que los escalares son los mismos. Supongamos entonces que existe un $v \in \mathbb{V}$ tal que:

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n;$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$

$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n;$ con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}.$

Igualando:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n.$$
$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_{\mathbb{V}}.(1)$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i, (1) $\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots,\ \alpha_n - \beta_n = 0.$

O sea : $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n = \beta_n.$

Entonces por ser B un sistema de generadores de $\mathbb{V}$, todo vector es combinación lineal de los elementos de la base y, por ser los vectores de la base l.i esa combinación lineal es única.

b. Por lo anterior entonces, para cada elemento de $v \in \mathbb{V}$, existe una única n-upla en $\mathbb{K}^n$ formada por los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que participan en su descomposición con respecto a la base.

Si definimos la función: $[\ .\ ]^B : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (**Coordenadas con respecto a la base** B)

Con la fórmula $[\ v\ ]^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,\quad \text{con}\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$

Es una función biyectiva que cumple:

a) $[\ v\ ]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$

b) $[\ v + w\ ]^B = [\ v\ ]^B + [\ w\ ]^B$

c) $[\ \lambda v\ ]^B = \lambda\ [\ v\ ]^B$

d) $\{w_1,\ w_2, \ldots, w_k\}$es l.i. en $\mathbb{V} \Longleftrightarrow \{[\ w_1\ ]^B,\ [\ w_2\ ]^B,\ \ldots,\ [\ w_k\ ]^B\}$ es l.i. en $\mathbb{K}^n$.

Entonces para chequear si un conjunto es l.i. o no en cualquier espacio de dimensión finita, podemos tomar coordenadas y chequear en $\mathbb{K}^n$ si el conjunto es l.i. o no.

Matriz de cambio de base

Supongamos que en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ consideramos dos bases:

$B = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ y $B' = \{w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n\}$

Para cada, $v \in \mathbb{V}$ puedo tomar coordenadas con respecto a cada una de estas bases:

$$[\ v\ ]^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ y también } [\ v\ ]^{B\prime} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Queremos encontrar,si existe, una relación entre estas coordenadas.

$$[\ v\ ]^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \mathbf{(2)}$$

Entonces tomando coordenadas m. a m. en **(2)**, con respecto a B' :

$$[\ v\ ]^{B\prime} = [\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\ ]^{B\prime} = \underbrace{\alpha_1[\ v_1\ ]^{B\prime} + \alpha_2[v_2\ ]^{B\prime} + \cdots + \alpha_n[v_n\ ]^{B\prime}}_{\text{comb. lineal en } \mathbb{K}^n} \quad \mathbf{(3)}$$

Podemos escribir:

$$[\ v\ ]^{B\prime} = \underbrace{[[\ v_1\ ]^{B\prime}|\ [v_2\ ]^{B\prime}|\ \ldots |\ [v_n\ ]^{B\prime}]}_{\text{matriz de } n\times n} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = M_B^{B'}[\ v\ ]^B$$

La matriz $M_B^{B'}$ nos llena de gozo!!!!

Porque no depende de cada vector v, sólo depende de las bases B y B'.

Como es única le podemos poner un nombre, se la llama la **la matriz de cambio de base de B en B'.**

Y sirve justamente para encontrar las coordenadas de cualquier vector con respecto a la base B' usando sus coordenadas con respecto a la base B.

$$\boxed{\mathrm{M}_B^{B'}[\ v\ ]^B = [\ v\ ]^{B\prime}}$$

Es fácil verificar que se cumple:

1. $M_B^{B'} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible.
2. $\mathrm{M}_{B'}^B = (M_B^{B'})^{-1}$

Subespacios fundamentales de una matriz.

Ejemplo ¿motivador?:

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ nos piden hallar $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tal que: $Ax = b$.

Para resolverlo siempre triangulamos la matriz ampliada del sistema:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ -1 & -2 & 1 & | & -5 \end{matrix}\right| \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1;F_4+F_1} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -2 & 2 & | & -4 \end{matrix}\right| \xrightarrow[F_4+2F_2]{F_3-F_2} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{matrix}\right|$$

En este caso tenemos infinitas soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Combinación Lineal}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Entonces el sistema tiene solución si $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de las columnas de A.

¿El sistema tendrá solución única o infinitas soluciones?

Por todo esto entonces vale la pena poner algunos nombres.

Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se definen los subespacios:

$\text{Col}(A) = \text{gen}\{\text{col}_1(A), \text{col}_2(A),\ \ldots, \text{col}_n(A)\} \subset \mathbb{K}^m.$

$\text{Fil}(A) = \text{gen}\{\text{fil}_1(A), \text{fil}_2(A),\ \ldots, \text{fil}_m(A)\} \subset \mathbb{K}^n.$

$\text{nul}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n / Ax = 0_{\mathbb{K}^m}\} \subset \mathbb{K}^n.$

$\text{nul}(A^T) = \{x \in \mathbb{K}^m / A^T x = 0_{\mathbb{K}^n}\} \subset \mathbb{K}^m.$

Se define **rango columna** de una matriz a la cantidad de columnas l.i. que tiene una matriz.

Se define **rango fila** de una matriz a la cantidad de filas l.i. que tiene una matriz.

Se prueba que $\forall\ A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ **rango columna**(A) = **rango fila**(A), por lo tanto hablamos directamente de **rango**(A) =nº de filas l.i. de A =nº de columnas l.i. de $A = \text{rg}(A)$.

Supongamos que nos piden resolver el sistema:

$\boxed{Ax = b \text{ con } A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ b \in \mathbb{K}^m.}$

Se trata entonces de buscar un vector $x \in R^n / Ax = b$

Explicitemos las columnas de A, $A = [v_1|v_2|\ldots|v_n],$ con $v_i \in \mathbb{K}^{m\times 1},\ 1 \leq i \leq n.$

$$Ax = [v_1|v_2|\ldots|v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = b.$$

O sea, estamos buscando si existe una combinación lineal de las columnas de A que dé por resultado b.

Por lo tanto:

$\boxed{\text{El sistema tendrá solución} \Leftrightarrow b \in \text{col}(A).}$

Y si $b \in \text{col}(A)$ ¿cuándo la solución será única y cuando tendrá infinitas soluciones?

Tendrá solución única si la combinación lineal $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = b$. tiene como solución únicos escalares $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ y sabemos que eso sucede sólo cuando los vectores $v_1,\ \ldots, v_n$ son l.i.
Entonces:

$\boxed{\text{Solución única si las columnas de } A \text{ son li, } \dim(\mathrm{col}(A)) = n}$

$\boxed{\text{Infinitas soluciones si } \mathrm{rg}(A) < n.}$

Cuando el sistema tiene infinitas soluciones sabemos que todas las soluciones del sistema pueden escribirse como x_p+x_h, con x_p solución particuar de $Ax = b$ y x_h solución del sistema homogéneo, o sea $x_h \in \mathrm{Nul}(A)$.
Pues, si el sistema tiene solución, supongamos que x_1 y x_2 son soluciones de $Ax = b \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Nul}(A)$, luego $x_2 = \underbrace{x_1}_{x_p} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{x_h \in \mathrm{Nul}(A)}$.

Entonces, demostramos que si el sistema es compatible

$\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} \subseteq \{x_p + x_h / \ x_p \text{ sol. particular },\ x_h \in \mathrm{Nul}(A)\}$ **(a)**

Por otro lado todo vector de la forma $v = x_p+x_h$, con x_p solución particular y x_h solución de homogéneo, es solución del sistema pues :

$Av = A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0_{\mathbb{R}^m}$. Entonces demostramos que si el sistema es compatible:

$\{x_p + x_h / \ x_p \text{ sol. particular },\ x_h \in \mathrm{Nul}(A)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ **(b)**

Luego por **(a)** y **(b)**, si el sistema es compatible:

$\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} = \{x_p + x_h / \ x_p \text{ sol. particular },\ x_h \in \mathrm{Nul}(A)\}$

Observaciones:

En todo lo que sigue $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

a. $\text{col}(A) = \{w = Ax / x \in \mathbb{R}^n\}$

b. $\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rg}(A) = n$

Demostración:

Si $\dim(\text{Nul}(A)) = n \Rightarrow A = 0_{\mathbb{K}^{m\times n}} \Rightarrow \text{nul}(A) = \mathbb{K}^n$ y $\text{col}(A) = \{0_n\}$ y si $\text{rg}(A) = n \Rightarrow A$ tiene n columnas l.i. y $\text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Por ejemplo $B = \{\}$

Supongamos $\dim(\text{Nul}(A)) = k < n \Rightarrow$ existe una base de $\text{nul}(A)$, $B_N = \{u_1, \ldots, u_k\}$ que puede ser extendida a una base de $\mathbb{K}^n$, $B = \{u_1, \ldots, u_k, \mathbf{u_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. queremos ver que $\text{rg}(A) = \dim(\text{col}(A)) = n - k$.

Entonces, si $y \in \text{col}(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{K}^n$ tal que $y = Ax$, como $B = \{u_1, \ldots, u_k, \mathbf{u_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_n}\} \Rightarrow$ x será combinación lineal de los vectores de la base.

$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha_n u_n$

$$\begin{aligned} y = Ax &= A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= \underbrace{\alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2 + \cdots + \alpha_k Au_k}_{=0_{\mathbb{K}^m}} + \alpha_{k+1} Au_{k+1} + \cdots + \alpha_n Au_n \\ &= \alpha_{k+1} Au_{k+1} + \cdots + \alpha_n Au_n,\ \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall\, 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Entonces $y \in \text{col}(A) \Leftrightarrow y \in \text{gen}\{Au_{k+1}, \ldots, Au_n\}$, o sea $\text{col}(A) = \text{gen}\{Au_{k+1}, \ldots, Au_n\}$. Veamos ahora que estos generadores son l.i:

$\lambda_1 Au_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} Au_n = 0_{\mathbb{K}^m}$ **(1)**

$\Leftrightarrow A(\lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n) = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n \in \text{nul}(A) \Leftrightarrow \lambda_1 u_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-k} u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k$

Pero como $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ es un conjunto l.i. la igualdad anterior se cumple sólo si **todos** los escalares son nulos, en particular $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$ que vienen de **(1)**. Entonces $\dim(\text{col}(A)) = n - k$.

Entonces se cumple que $\boxed{\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rg}(A) = n = \text{nro. de columnas de } A,\ \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}}$.

c. $\text{nul}(B) \subseteq \text{nul}\,(AB)$ y si $\text{col}(B) \cap \text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ se cumple la igualdad $\text{nul}(B) = \text{nul}\,(AB)$.

La primera inclusión es inmediata:
Si $x \in \text{nul}(B) \Rightarrow Bx = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow (AB)x = A(Bx) = A0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow x \in \text{nul}(AB)$.

Por lo tanto $\boxed{\text{nul}(B) \subseteq \text{nul}(AB).}$

Ahora veamos qué pasa si $\text{col}(B) \cap \text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
Ya sabemos que la inclusión anterior se cumple siempre, tendremos que ver que cuando $\text{col}(B) \cap \text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ se cumple la otra inclusión.

$$\text{Sea } \underline{x \in \text{nul}(AB)} \Rightarrow (AB)x = 0_{\mathbb{K}^m} = A\underbrace{(Bx)}_{\in \text{col}(B)} = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Bx) \in \text{col}(B) \cap \text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Rightarrow (Bx) = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \underline{x \in \text{nul}(B)} \Rightarrow \text{nul}(AB) \subseteq \text{nul}(B).$$

Y como ya demostramos que siempre vale $\text{nul}(B) \subseteq \text{nul}(AB)$:

$\boxed{\text{Si } \text{col}(B) \cap \text{nul}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \text{ vale } \text{nul}(B) = \text{nul}(AB).}$

d. $\text{col}(AB) \subseteq \text{col}(A)$ y si $\text{rg}(B) = n \Rightarrow \text{col}(AB) = \text{col}(A)$

Otra vez, la primera inclusión es inmediata:

$$\text{Si } \underline{y \in \text{col}(AB)} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{K}^p / y = (AB)z = A\underbrace{(Bz)}_{\in \mathbb{K}^n} \in \text{col}(A) \Rightarrow \underline{y \in \text{col}(A)}.$$

Luego $\boxed{\text{col}(AB) \subseteq \text{col}(A).}$

Ahora supongamos que $\text{rg}(B) = n \Rightarrow \text{col}(B) = \mathbb{K}^n \Rightarrow$ para cada $y \in \text{col}(A)\ \ \exists\, x \in \mathbb{K}^n /$ $y = Ax,$ y como $\text{col}(B) = \mathbb{K}^n, \exists z \in \mathbb{K}^p / Bz = x \Rightarrow y = Ax = A(Bz) \Rightarrow y \in \text{col}(AB)$ Luego: si $\text{rg}(B) = n \Rightarrow \text{col}(A) \subseteq \text{col}(AB)$. Y como siempre vale la otra inclusión:

$$\boxed{\text{Si } \text{rg}(B) = n, \text{col}(AB) = \text{col}(A)}$$