VECTOR DE COORDENADAS

Sea un espacio vectorial V de dimensión finita (n) sobre un cuerpo K.

Sea el conjunto $B = \{v_i, i \in I_n\}$ una base ordenada del espacio vectorial, cualquier vector $v \in V$ puede expresarse de modo único como combinación lineal de los vectores de la base B.

Esto es: existen únicos escalares en $K, \alpha_i\,,\ 1 \leq i \leq n\ / v = \sum_i^n \alpha_i v_i.$

El vector en K^n dado por $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]^T$ se denomina vector de coordenadas del vector v y se indica:

$$[\boldsymbol{v}]^{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo :

Consideremos $V = \mathbb{R}^{2x2}$ y la base ordenada dada por el conjunto de matrices:

$$B = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Tomemos la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Estamos interesados en hallar el vector de coordenadas de la matriz M en la base B es decir $[M]^B$. Para poder encontrar ese vector de coordenadas no tenemos más que proponer la siguiente igualdad de matrices :

$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = M$ que nos lleva , luego de usar las operaciones de suma de matrices y producto por un escalar al siguiente sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 2 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$[M]^B = [2 \quad -2 \quad -1 \quad 2]^T$

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

En la sección anterior hemos visto que es posible representar cada vector de un espacio vectorial mediante una n-upla, una vez que se ha elegido alguna base.

La pregunta que cabe ahora es, ¿Cómo cambia dicha representación si elegimos otra base?

Supongamos que conocemos dos bases ordenadas distintas de un mismo espacio vectorial de dimensión finita (n).

Las llamaremos $B_1 = \{v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n\}$ y $B_2 = \{w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n\}$

Es de esperar que encontremos alguna relación entre $[v]^{B_1}$y $[v]^{B_2}$

Antes de introducir la idea formal ejemplificamos en $\mathbb{R}^2$ y en este caso elegimos :

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ podemos buscar las coordenadas de un vector particular como

por ejemplo: $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ cuyas coordenadas en cada base resultan $[v]^{B_1} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$ y $[v]^{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{11}{12} \end{bmatrix}$

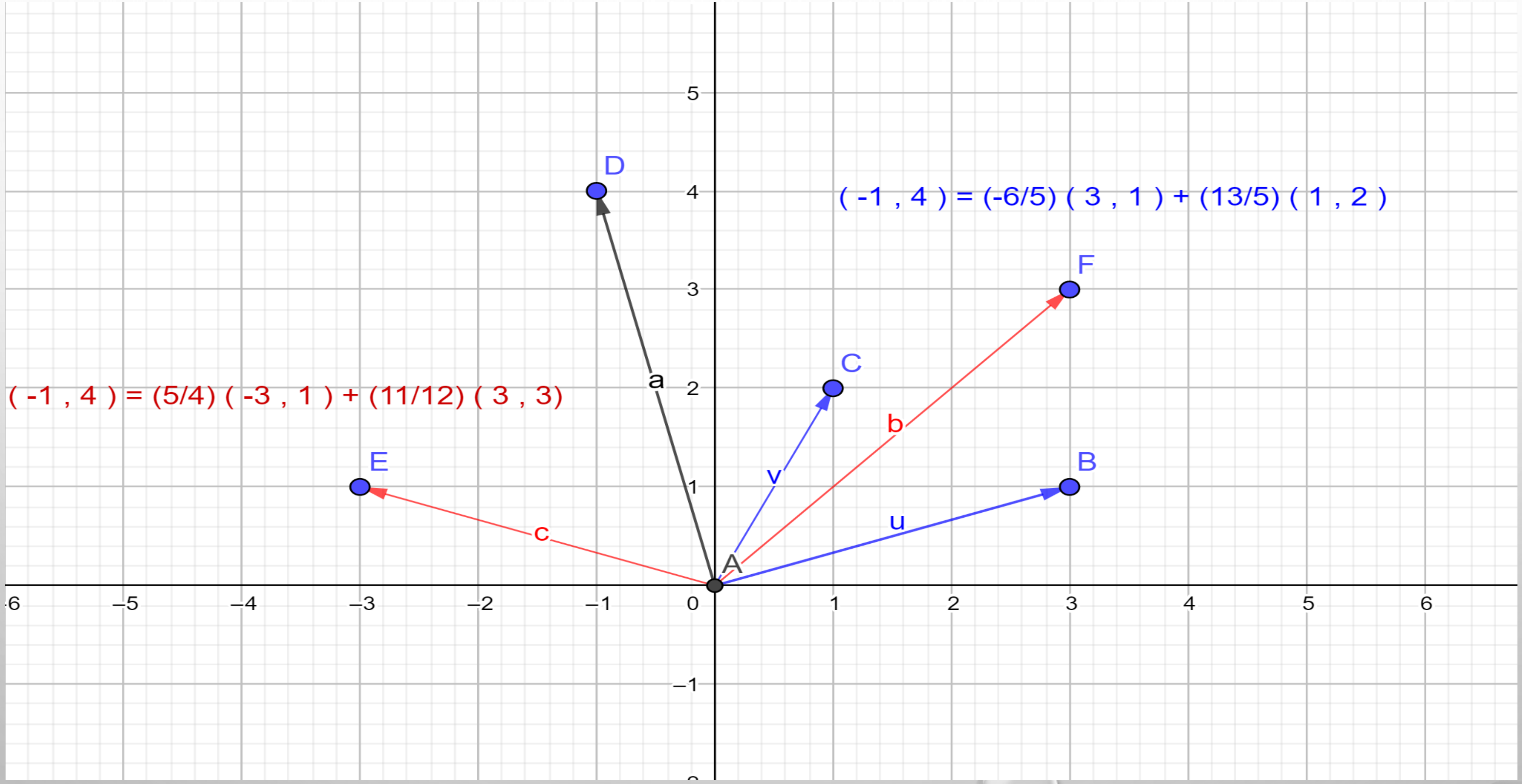
ahora bien cada vector de la base B_1 también puede expresarse en la base B_2 y así resulta que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

podríamos armar una matriz cuyas columnas fueran esos vectores de coordenadas , por ahora será:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Podemos graficar el ejemplo anterior como sigue:



¿Qué ocurre si planteamos el siguiente producto $M\begin{bmatrix} \frac{-6}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$

La respuesta es:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-6}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{11}{12} \end{bmatrix}.$$

Esta relación nos lleva a pensar el problema de un modo más general.

Con la idea del ejemplo anterior podemos ahora dar de modo general la definición de una matriz de cambio de base de B_1 a B_2 que se indica como $M_{B_1}^{B_2}$.

Esta matriz de K^{nxn} es $\boldsymbol{M_{B_1}^{B_2}}=\left([\boldsymbol{v_1}]^{\boldsymbol{B_2}} \quad [\boldsymbol{v_2}]^{\boldsymbol{B_2}} \quad [\boldsymbol{v_3}]^{\boldsymbol{B_2}} \quad \ldots \quad [\boldsymbol{v_n}]^{\boldsymbol{B_2}}\right)$

La prueba es como sigue

Sean dos bases de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita (n)

$B_1 = \{v_1 , \quad v_2, \quad \dots \quad v_n\}$ y $B_2 = \{w_1 , \quad w_2 , \quad \dots \quad w_n\}$

Dado que B_2 es base de V cada vector de la base B_1 se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores de la base.

Así
$$\begin{cases} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}\, w_n \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones vectoriales tiene única solución, de modo que la matriz dada como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es inversible.

Observación:
Esta matriz tiene por columnas $[v_i]^{B_2}$ con $1 \leq i \leq n$

Probaremos que esta matriz opera sobre vectores de coordenadas y devuelve vectores de coordenadas.

Es decir $\boldsymbol{M_{B_1}^{B_2}}\ [\boldsymbol{v}]^{\boldsymbol{B_1}} = [\boldsymbol{v}]^{\boldsymbol{B_2}}$, $\forall\, v \in V$.

Sin perder generalidad tomemos dos bases cualesquiera de un espacio vectorial de dimensión dos.

$B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2\}$

Así $\left\{\begin{array}{l} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 \end{array}\right.$ ◆

En este caso es $M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Supongamos ahora un vector $v \in V$: $\mathrm{v} = k_1v_1 + k_2v_2$ teniendo en cuenta lo expresado en ◆

Escribimos

$$\mathrm{v} = k_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2) + k_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2) = (k_1a_{11} + k_2a_{12})w_1 + (k_1a_{21} + k_2a_{22})w_2$$

Así $[v]^{B_2} = \begin{bmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{12} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = M_{B_1}^{B_2} .[v]^{B_1}$

Una propiedad importante es que las matrices de cambio de base resultan inversibles

por tanto, como existe $\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$ podemos también escribir:

$$\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ (\ M_{B_1}^{B_2}\ [v]^{B_1}) = \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ [v]^{B_2}$$

$$(\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ \ M_{B_1}^{B_2}\ )\ [v]^{B_1} = \ \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ [v]^{B_2}$$

Como $(\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ \ M_{B_1}^{B_2}\ ) = I_{nxn}$ con I_{nxn} la matriz identidad , resulta que

$[v]^{B_1} = \ \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.\ [v]^{B_2}$ y así $\boldsymbol{\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = M_{B_2}^{B_1}}$

Ilustraremos a continuación en el espacio P_2 tomando las bases ordenadas

$$B_1 = \{1 - x \ , \ 1 + x^2 \ , \ 1 + x + x^2\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{ x \ , \ 1 - 2x^2 \ , \ 1 + x \}$$

como $[1 - x]^{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[1 + x^2]^{B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ y $[1 + x + x^2]^{B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, podemos concluir que

$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y en forma análoga se puede calcular $M_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por último, consideremos el siguiente ejemplo:

Trabajaremos en P_2 con la base $B_1 = \{-1+x\,, -1+x-x^2, 2-x\}$

Si se sabe que $M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, nos interesa encontrar la base B_2.

Una manera de poder encontrar esa base es justamente tomando la información de la matriz ya que , no sabemos aún quienes son los tres polinomios de la base B_2, pero sí sabemos que relación guardan con los vectores de la base B_1.

Anotemos como $B_2 = \{p_1\ , p_2\ , p_3\}$ a la base que buscamos.

De la matriz de cambio de base se deduce que:

$$\begin{cases} -1+x = p_1 - p_2 \\ -1+x-x^2 = p_2 \\ 2-x = p_2 - p_3 \end{cases}$$

Hemos encontrado de manera directa que $p_2 = -1 + x - x^2$.

Reemplazando encontramos que $p_1 = -1 + x + p_2 = -2 + 2x - x^2$ y $p_3 = -2 + x + p_2 = -3 + 2x - x^2$.

Así queda $B_2 = \{-2 + 2x - x^2, -1 + x - x^2, -3 + 2x - x^2\}$

Otra forma de encontrar esa base es teniendo en cuenta que:

$$\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = M_{B_2}^{B_1} \quad \text{con} \quad M_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De esta matriz, en forma directa, se obtienen los vectores de la base B_2 (Recordar definición de la matriz de cambio de base).

Una última pregunta , habrá vectores de P_2 que verifiquen la siguiente igualdad ?

$$[p]^{B_1} = [p]^{B_2}$$

Un planteo matricial nos llevará a la solución .

Indicamos a $[p]^{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Así nos quedará planteada la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Que lleva al sistema de ecuaciones dado por $\begin{cases} a = a \\ -a + b + c = b \\ -c = c \end{cases}$

Que tiene como solución $a = c = 0\ ,\ \forall\, b \in \mathbb{R}.$ modo

Los polinomios que cumplen con lo pedido, finalmente, tienen $[p]^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ y son de la forma

$$p(x) = b(-1 + x - x^2)\,\forall\, b \in \mathbb{R}.$$

Esto no termina acá….